

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024**QUESTIONNAIRE**

Date :	18.09.24	Horaire :	08:15 - 10:15	Durée :	120 minutes	
Discipline :	MATHE	Type :	écrit	Section(s) :	GSO	
					Numéro du candidat :	

Sauf indications contraires, pour l'ensemble du questionnaire, arrondir les résultats à trois chiffres significatifs.

Question 1 (2 + 3) + (1 + 2) = 8 points

1.1. Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes sur le domaine indiqué.

- a) $e^{x^2-4} = e^5$ $D = \mathbb{R}$
b) $\ln(-3x + 2) < 0$ $D =]-\infty; \frac{2}{3}[$

1.2. Simplifier autant que possible les expressions suivantes en utilisant les propriétés des exponentielles et des logarithmes. Détailler les calculs !

- a) $e^{-\ln(8)}$
b) $e^{2 \ln(3) - \ln(4)}$

Question 2 1 + 1 + 2 + 3 + 2 = 9 points

Le capital d'une entreprise créée le 1^{er} janvier 2004 peut être modélisé par la fonction f définie par

$$f(t) = 10,3 \cdot e^{0,68t} \quad \text{pour } t \in [0;14]$$

où t représente le nombre d'années depuis lesquelles l'entreprise existe et $f(t)$ représente son capital en milliers d'euros t années après sa création.

- 1) Quel était le capital de départ de l'entreprise ?
- 2) Calculer $f(4)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- 3) Au début de quelle année l'entreprise peut-elle annoncer pour la première fois un capital supérieur à 90 000 euros ?
- 4) Au cours de quel mois l'entreprise possède-t-elle un capital égal à un million d'euros ?
Répondre au format de date « Mois/Année ».
- 5) Quel est le pourcentage d'évolution du capital de l'entreprise entre le 1^{er} janvier 2005 et le 1^{er} janvier 2006 ?

Question 3 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 11 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Une étude sur la criminalité générale constatée par les forces de l'ordre a relevé des données sur l'évolution des infractions contre les personnes au Luxembourg entre 2018 et 2022.

Voici le tableau résumant les données :

Année	2018	2019	2020	2021	2022
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5
Nombre d'infractions contre les personnes (y_i)	7409	8070	8375	8814	9467

Source : statistiques.public.lu

Partie A : Ajustement affine

- 1) Justifier à l'aide du coefficient de corrélation qu'un ajustement affine est valable.
- 2) Donner une équation de la droite de régression de y en x .
- 3) Quel serait, d'après ce modèle, le nombre d'infractions contre les personnes en 2025 ?

Répondre à l'unité près.

Partie B : Ajustement exponentiel

- 4) Compléter sur la feuille d'énoncé le tableau suivant :

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5
Nombre d'infractions contre les personnes (y_i)	7409	8070	8375	8814	9467
$z_i = \ln(y_i)$					

- 5) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x .
- 6) En utilisant le résultat précédent, déterminer un ajustement de y en x
sous la forme $y = k \cdot e^{ax}$ (avec k et a des réels).
- 7) Au cours de quelle année, d'après ce modèle, le nombre d'infractions contre les personnes dépassera-t-il les 15 000 ?

Question 4 $8 \cdot 2 = 16$ points

On a fait une étude sur les voitures immatriculées au nom des habitants d'une ville. On a considéré le type de propulsion (électrique ou non) et la marque de la voiture (européenne ou non).

Les voitures électriques constituent 2% des voitures.

Parmi les voitures non électriques, 70% sont d'une marque européenne.

Parmi les voitures électriques, 90 % sont d'une marque non-européenne.

On choisit au hasard une voiture et on considère les événements suivants :

- W : « Il s'agit d'une voiture électrique. »
- E : « La voiture a été fabriquée par une marque européenne. »

- 1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
- 2) Montrer que la probabilité qu'une voiture soit d'une marque européenne est de 0,688.
- 3) Calculer la probabilité qu'une voiture soit électrique sachant que sa marque n'est pas européenne. Répondre par une phrase.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures d'une marque européenne parmi un échantillon de 600 voitures.

On suppose que le nombre de voitures est suffisamment grand pour que le choix d'un échantillon de 600 voitures soit assimilé à des tirages indépendants avec remise.

- 4) Quelle loi suit X ? Justifier et préciser les paramètres.
- 5) Calculer $P(X \leq 400)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- 6) Calculer $E(X)$ à l'unité près et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- 7) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de voitures d'une marque européenne dans un échantillon de 600 voitures.
- 8) Dans un quartier de la ville, 600 habitants ont immatriculé une voiture à leur nom. Parmi ces voitures, il y a 452 voitures fabriquées par une marque allemande. Est-ce que l'échantillon de ce quartier est représentatif de toutes les voitures immatriculées dans la ville ? Justifier.

Question 5 $4 + (1 + 1 + 2 + 1 + 1) = 10$ points

Les parties A et B sont indépendantes.

Lio fait souvent une commande avec livraison auprès de sa pizzeria préférée « Impasto e Amore ».

Sa commande consiste toujours en la même pizza. En analysant l'historique de toutes ses commandes, il a constaté que le temps moyen de livraison est de 30 minutes.

On note X la variable aléatoire représentant le temps (en minutes) que « Impasto e Amore » met pour livrer une commande chez Lio.

On admet que X suit une loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type σ exprimés en minutes.

Partie A

- 1) On donne $P(28 \leq X \leq 32) = 0,48$.

Déterminer à 10^{-1} près la valeur de σ en vous ramenant à la loi normale centrée réduite.

Justifier.

Partie B

Par la suite on admet que $\mu = 30$ min et $\sigma = 3$ min.

- 2) Calculer la probabilité que « Impasto e Amore » livre la pizza chez Lio entre 25 et 35 minutes après la commande.
- 3) Déterminer sans calculatrice l'intervalle de temps dans lequel se font environ 68,3 % des livraisons de « Impasto e Amore » chez Lio. Justifier.
- 4) Lio passe une commande chez « Impasto e Amore » à 19h23. Il se souvient qu'il devra quitter sa maison à 20h15 pour aller à un rendez-vous. Il lui faudrait 20 minutes pour manger la pizza. Quelle est la probabilité que Lio puisse encore manger la pizza avant son départ ?
- 5) Déterminer la valeur de a tel que $P(X > a) = 0,2$. Arrondir a au dixième près.
- 6) Interpréter le résultat de 5) dans le contexte de l'exercice.

Question 6 $1 + (1 + 1 + 1 + 2) = 6$ points

Une entreprise veut étudier l'efficacité d'une campagne publicitaire pour leur produit A.

Lors d'une enquête, on interroge 1200 clients à la sortie d'un supermarché. On demande à chaque personne si elle a vu la publicité pour le produit A et si elle vient d'acheter le produit A.

Voici un tableau regroupant les résultats de cette enquête :

		Vu la publicité ?		Total
		Oui	Non	
Acheté le produit ?	Oui	41		
	Non	106		903
	Total			

1) Compléter sur la feuille d'énoncé le tableau ci-dessus.

On a réalisé un test du χ^2 au seuil de signification $\alpha = 5\%$:

- 2) Énoncer l'hypothèse H_0 .
- 3) Énoncer l'hypothèse alternative H_1 .
- 4) Combien vaut la p -valeur ?
- 5) Conclure dans le contexte de l'exercice.