| EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **QUESTIONNAIRE** | | | | | | | |
| *Date :* | 04.06.24 | | *Horaire :* | 08:15 - 10:15 | | *Durée :* | 120 minutes |
| *Discipline :* | Mathématiques | *Type :* | écrit | *Section(s) :* | GSO | | |
| | | | | | *Numéro du candidat :* | | |

*Sauf indications contraires, arrondir les résultats à trois chiffres significatifs.*

**Question 1** 2 + (1 + 2 + 4) = 9 points

1) Simplifier en utilisant les propriétés des exponentielles et des logarithmes. Détailler le calcul.

$$\frac{e^{1-\ln(6)}}{e^{ln(6)+1}}$$

2) Résoudre algébriquement les équations et l'inéquation suivantes sur les domaines indiqués.
   a. $e^{-6x} = -6$ $\qquad D = \mathbb{R}$
   b. $\ln(5x-1) = 1$ $\qquad D = \left]\frac{1}{5};+\infty\right[$
   c. $ln(x) + \ln\ (6+x) \geq \ln(9x)$ $\qquad D = ]0;+\infty[$

**Question 2** 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8points

*Toutes les réponses de cet exercice seront arrondies à l'unité près.*

Une université modélise le niveau de maitrise d'une compétence en fonction du temps passé à étudier. Au niveau de la note obtenue dans un devoir en classe, on observe que les gains initiaux sont plus significatifs, et que l'effet de l'étude diminue à mesure que le temps passe.

La fonction $f$ définie par

$$f(t) = 7\ln(8t+3) + 2\text{t} + 2$$

donne la note obtenue (sur 60) dans un devoir en classe en fonction du temps $t$ (en heures) passé à réviser. Selon ce modèle :

1) Quelle note obtient un élève qui n'a pas révisé ?
2) Calculer $f(10)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3) Combien d'heures un élève doit-il réviser au minimum pour un devoir en classe afin d'obtenir une note suffisante ?
4) Un élève a étudié 7 heures pour son devoir en classe. Déterminer le pourcentage d'évolution de la note si l'élève passe de 7 heures de révision à 10 heures de révision ? Donner une estimation à trois chiffres significatifs.
5) Quelle sera la note d'un élève qui a étudié pendant 20 heures ? Discuter ce résultat.

**Question 3** (1 + 1 + 1,5) + (2 + 1 + 2 + 1,5) = 10 points

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'utilisateurs de la plateforme Microsoft Teams de 2017 à 2022.

| **Année** | **2017** | **2018** | **2019** | **2020** | **2021** | **2022** | **2023** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rang de l'année $x_i$** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **Nombre d'utilisateurs $y_i$ (en millions)** | 2 | 8 | 20 | 75 | 145 | 270 | 320 |

Source : Microsoft

**Partie A :**

1) Justifier qu'un ajustement affine est valable.
2) Déterminer l'équation de la droite de régression de $y$ en $x$.
3) Déterminer l'année durant laquelle le nombre d'utilisateurs dépasserait les 500 millions d'utilisateurs, en utilisant cet ajustement.

**Partie B :**

On pose $z = \ln(y)$

4) Compléter le tableau suivant.

| **Année** | **2017** | **2018** | **2019** | **2020** | **2021** | **2022** | **2023** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rang de l'année $x_i$** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **Nombre d'utilisateurs $y_i$ (en millions)** | 2 | 8 | 20 | 75 | 145 | 270 | 320 |
| $\boldsymbol{z_i = \ln(y_i)}$ | | | | | | | |

5) Donner l'équation de la droite de régression de $z$ en fonction de $x$.
6) En déduire un ajustement de $y$ en fonction de $x$ sous la forme $y = ke^{ax}$ ($k$ et $a$ étant des réels).
7) A l'aide de ce nouveau modèle, estimer le nombre d'utilisateurs de Microsoft Teams en 2025. Donner la réponse au million près.

**Question 4** 2 + 2 + 2 + 1 + 2 = 9points

Aux examens de fin d'études secondaires se sont présentés en total 3 000 candidats, dont 1 400 élèves de l'enseignement général et 1 600 élèves de l'enseignement classique. Un élève peut être admis ou non. Parmi les élèves de l'enseignement général, 80% sont admis. Dans l'enseignement classique, un élève sur dix n'est pas admis.

On choisit un élève au hasard et on note les événements suivants :

G : « l'élève choisi est inscrit dans l'enseignement secondaire général » ;

C : « l'élève choisi est inscrit dans l'enseignement secondaire classique » ;

A : « l'élève choisi est admis » ;

1) Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2) Montrer que la probabilité que le candidat soit admis est d'environ 85,3%.
3) Sachant que le candidat n'est pas admis, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un élève de l'enseignement classique.

On choisit au hasard 10 candidats qui se sont présentés aux examens, ce choix étant assimilable à un tirage avec remise. On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de candidats admis dans cet échantillon. On suppose que $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

4) Donner les paramètres $n$ et $p$.
5) Calculer $P(5 \leq X \leq 8)$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

**Question 5** 2 + 1 + 2 + 2 = 7points

Après une infection au SARS-CoV-2, certaines personnes souffrent d'une maladie prolongée et de symptômes persistants, appelée « long-COVID ».

Selon une étude du programme de recherche CoVaLux, 10% des personnes ayant été infectées par le SARS-CoV-2 sont touchées par le long-COVID.

Pour tester cette hypothèse, l'Université du Luxembourg lance une enquête sur un échantillon de 300 personnes prises au hasard parmi les personnes ayant été infectées par le SARS-CoV-2.

La population est assez grande pour pouvoir assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui souffrent du long-COVID.

1) Justifier que X suit une loi binomiale et donner les paramètres.
2) Déterminer la probabilité qu'exactement 25 personnes de ce groupe soient atteintes du long-COVID.
3) Déterminer un intervalle de fluctuation du nombre de cas long-COVID au seuil de 95%.
4) Dans l'échantillon considéré, 45 personnes sont atteintes du long-COVID. Cette étude confirme-t-elle l'hypothèse que 10% des personnes ayant été infectées par le SARS-CoV-2 sont touchées par le long-COVID ?

**Question 6** (1 + 2 + 1) + [1 + 2 + (1 + 3)] = 11 points

**Partie A :**

Une étude d'une entreprise de transports publics a révélé que la durée, en minutes, du trajet du train de Mersch à Luxembourg peut être modélisée par une variable aléatoire $T$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$ minutes et d'écart-type $\sigma = 5$ minutes.

1) Victoria prend le train pour se rendre au travail. Déterminer la probabilité que son trajet prenne plus de 30 minutes.
2) Déterminer $a$ tel que $P(T \leq a) = 0{,}95$ et interpréter dans le contexte de l'exercice.
3) Victoria veut arriver à la gare de Luxembourg à 8h00 au plus tard pour être à l'heure au travail. Est-ce que Victoria peut prendre le train qui part à 7h30 à Mersch en direction de Luxembourg si elle veut être à l'heure avec une probabilité d'au moins 95%?

**Partie B :**

La même étude a révélé que le retard des bus, en minutes, peut être modélisé par une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 6$ minutes et d'écart-type $\sigma$ minutes.

On sait $P(Y > 10) = 0{,}12$.

4) Déterminer sans calculatrice $P(Y > 6)$.
5) Déterminer sans calculatrice $P(2 \leq Y \leq 10)$ et interpréter le résultat.
6) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y-6}{\sigma}$
   a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?
   b. Déterminer la valeur de $\sigma$.

**Question 7** 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 6 points

Une entreprise mène une enquête sur les effets du télétravail sur le degré de satisfaction de ses 3500 employés. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

| | **Très satisfait** | **Peu satisfait** | **Non satisfait** | **Total** |
|---|---|---|---|---|
| **Employé sans télétravail** | 1100 | 950 | | |
| **Employé en télétravail** | 650 | | 100 | **1200** |
| **Total** | **1750** | **1400** | | |

1) Compléter le tableau ci-dessus.
2) Énoncer l'hypothèse $H_0$.
3) Énoncer l'hypothèse $H_1$.
4) On réalise le test du $\chi^2$ au seuil de signification $\alpha = 5\%$. Combien vaut la p-valeur ?
5) Conclure dans le contexte de la question.