

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024

QUESTIONNAIRE

Date :	03.06.24	Horaire :	08:15 - 11:15	Durée :	180 minutes
Discipline :	MATHE	Type :	écrit	Section(s) :	GSE
					Numéro du candidat :

Question 1 (2 + 4 = 6 points)

Démontrer les théorèmes suivants :

a) Pour tout réel a , $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$.

b) Pour tout entier $p \geq 1$ et tous réels $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_p > 0$,

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_p$$

Question 2 (5 points)

La fonction f est définie sur $[0;4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}} & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 2.

Question 3 (4 + 1 = 5 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ae^{4x-4} + be^{1-x} \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 3x - 2$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs représentations graphiques.

a) Déterminer a et b pour que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ aient une tangente commune au point d'abscisse 1.

b) Déterminer l'équation de cette tangente.

Question 4 (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\ln(\ln x^2) \leq 0$$

Question 5 (2 + 1 + 2 + 6 + 2 + 2 = 15 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{x}(x^2 - 3x + 2\ln x)$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine et interpréter graphiquement les résultats.
- Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ , dont l'équation est à déterminer.
- Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ .
- Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que f admet une unique racine et en déterminer un encadrement à 10^{-2} près.
- Tracer Δ et $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 1 sur les deux axes.

Question 6 (5 points)

Calculer la valeur exacte de $I = \int_1^{e^\pi} \cos\left(\frac{\ln x}{2}\right) dx$.

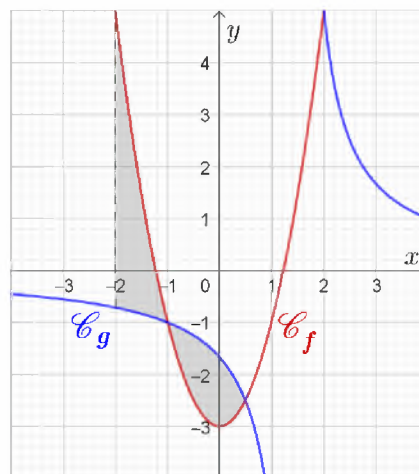
Question 7 (4 + 4 = 8 points)

On a représenté ci-contre les fonctions f et g définies sur $D_f = \mathbb{R}$

et $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{5}{2x-3}$$

- Calculer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Calculer la valeur exacte de l'aire de la surface grise, délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, ainsi que les droites d'équation $x = -2$ et $x = \frac{1}{2}$.

**Question 8 (4 + 2 + 4 = 10 points)**

On donne les points $A(-2; -5; 6)$, $B(-3; 0; 2)$, $C(-2; -1; 1)$, et la droite $d : \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 6t - 1 \\ z = t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

- Déterminer si les droites d et (BC) sont perpendiculaires.
- Déterminer l'équation cartésienne du plan P passant par A et perpendiculaire à d .
- Calculer la distance de A à d .