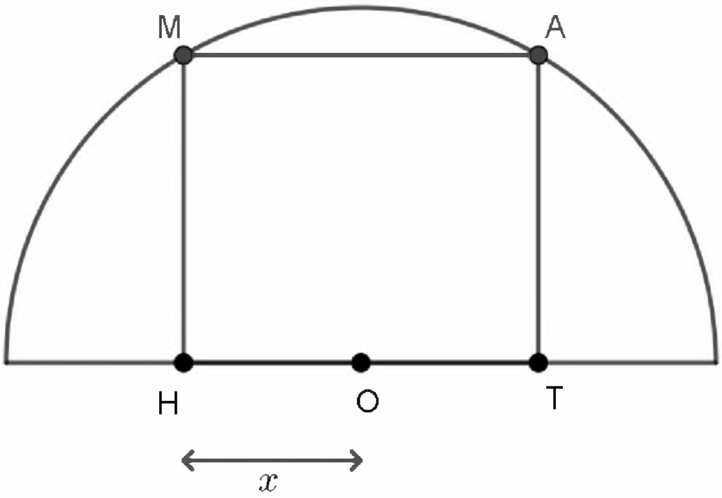
EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024						
QUESTIONNAIRE						
Date :	16.09.24		*Horaire :*	08:15 - 11:15	*Durée :*	180 minutes
Discipline :	MATHE	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GA3D	
					Numéro du candidat :	

Question 1 **[3+5 = 8 points]**

Un rectangle $MATH$ est inscrit dans un demi-cercle de centre O et de rayon 17 cm.

Soit x, en cm, la longueur du segment $[OH]$ avec $0 < x < 17$.



1) Démontrez que l'aire du rectangle $MATH$ est donnée par $A(x) = 2x\sqrt{289 - x^2}$.

2) Déterminez les dimensions exactes du rectangle $MATH$ pour que son aire soit maximale.

   Quelle est alors cette aire maximale ?

Question 2 **[2+6 = 8 points]**

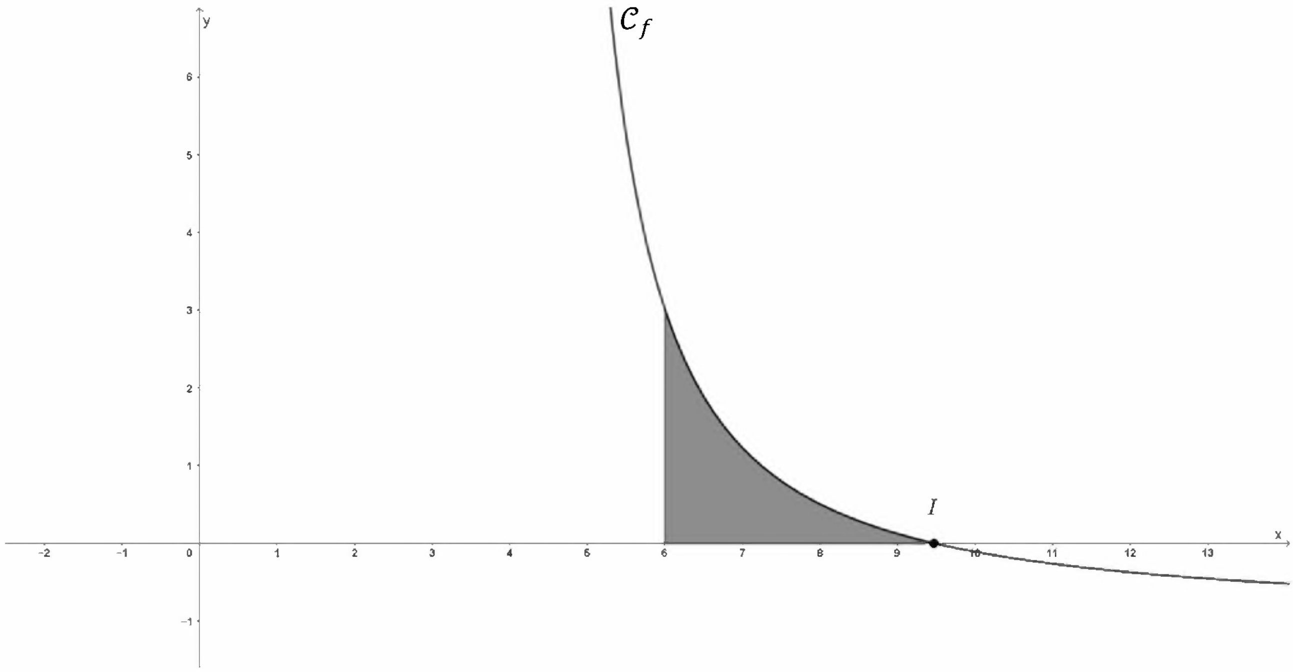
Calculez la valeur exacte de chaque intégrale.

1) $$\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^3}{2x}\, dx$$

2) $$\int_{-1}^{0} (x+2)^2 e^{3x}\, dx$$

Question 3 [1+2+2 = 5 points]

Soit f la fonction définie sur $]4;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x^2+12x-24}{(x-4)^2}$ et dont voici ci-contre sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan.



1) Soit I le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   Déterminez algébriquement les coordonnées du point I.

2) Soit F la fonction définie sur $]4;\ +\infty[$ par $F(x) = -x - \frac{8}{x-4} + 4\ln(x-4)$.
   Démontrez que F est une primitive de f sur $]4;\ +\infty[$.

3) Calculez l'aire $\mathcal{A}$ de la surface délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 6$.
   Donnez d'abord la valeur exacte, puis la valeur approchée au centième près.

Question 4 [4+6 = 10 points]

1) Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\ln(2x+1) - 2\ln(x-1) = \ln\frac{1}{x}$$

2) Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$e^{3x} - 13e^{x} \leq -36e^{-x}$$

Question 5 **[(2+3+3+1)+2+2 = 13 points]**

1) Soit g la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 - 3 - \ln(3x)$.

   a) Déterminez les limites aux bornes du domaine de g.

   b) Dressez le tableau de variations complet (avec limites et valeur exacte d'extremum éventuel) de la fonction g.

   c) Démontrez que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β sur $]0;\ +\infty[$.

   d) Déduisez-en le signe de $g(x)$ sur $]0;\ +\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{\ln(3x)+4}{x}$.

   a) Démontrez que pour tout x appartenant à $]0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

   b) Dressez le tableau de variations (sans limites) de la fonction f.

Question 6 **[1+2+3+2+2 = 10 points]**

On donne la droite

$$d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1) De la représentation paramétrique de la droite d, précisez les coordonnées d'un point A ainsi que les composantes d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite.

2) Déterminez une équation cartésienne du plan $\pi_1 \perp d$ passant par le point $B(1;-4;5)$.

3) Déterminez le point d'intersection I de la droite d et du plan π_1.

4) Calculez la distance du point B à la droite d.

5) Déterminez la mesure de l'angle $\widehat{BIC}$ avec $C(1;5;2)$.

Question 7 [6 points]

Résolvez le système suivant par une méthode au choix.

Donnez ensuite une interprétation géométrique du résultat.

$$\begin{cases} 2x + y - 4z + 1 = 0 \\ -x - y + 3z + 7 = 10 \\ 13x + 2y + z + 2 = 0 \end{cases}$$