EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024

QUESTIONNAIRE

Date :	22.05.24	*Horaire :*	08:15 - 11:15	*Durée :*	180 minutes
Discipline :	Math	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GA3D
				Numéro du candidat :	

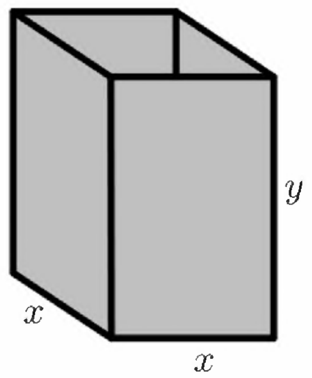
Question 1 **($3+4=7$ points)**

Une entreprise fabrique des boîtes en aluminium sans couvercle en forme de parallélépipède rectangle à base carrée.

Le volume d'une telle boîte est de 4000 cm^3.

L'entreprise aimerait que l'aire d'une boîte soit minimale.

On note par x (en dm) la longueur d'un côté de la base avec $x > 0$ et par y (en dm) sa hauteur avec $y > 0$.



1) Démontrez que l'aire de la boîte est donnée par $A(x) = x^2 + \frac{16}{x}$.

2) Déterminez en dm la valeur exacte de x pour que l'aire soit minimale.
   Quelle est alors cette aire minimale ?

Question 2 **($4+6=10$ points)**

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $e^{2x+6} \leq e^{-\frac{4}{x}}$

2) $\ln(3x-4) - \ln\sqrt{5-3x} \leq \ln\sqrt{x-1}$

Question 3 **($1+3+2+2+2+2+3=15$ points)**

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1+2\ln(2x)}{x}$.

Soit $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Déterminez le domaine de définition de la fonction f.

2) Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition et précisez les équations des asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3) Déterminez les coordonnées du point d’intersection I de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l’axe des abscisses.

4) Calculez la fonction dérivée f' de la fonction f.

5) Dressez le tableau de variations complet (avec limites et valeur exacte d’extremum éventuel) de la fonction f.

6) Tracez la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d’unité 1 cm en tenant compte de tous les résultats obtenus.

7) Déterminez l’équation réduite de la tangente $t_{\frac{e^2}{2}}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d’abscisse $\frac{e^2}{2}$.

Question 4 **($3+4=7$ points)**

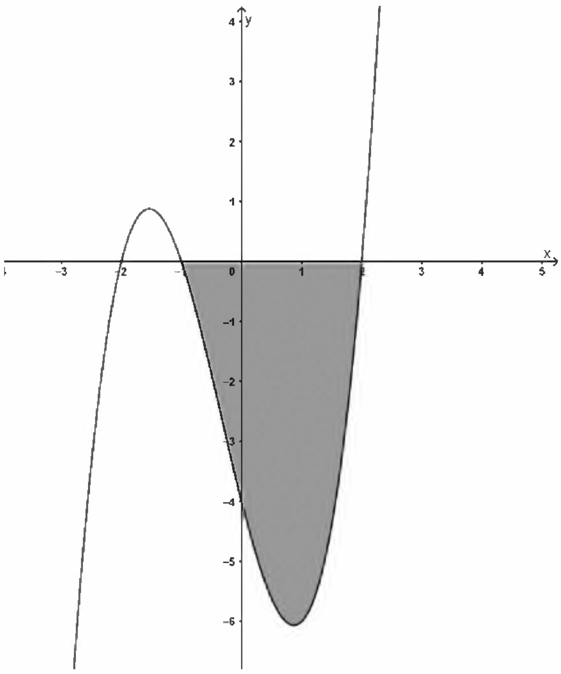
Calculez la valeur exacte de chaque intégrale.

1) $$\int_0^1 \frac{5x}{2-x^2}\,dx$$

2) $\int_{-2}^{1} (1-2x)e^{-x}\,dx$

Question 5 **(2 + 3 = 5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ et dont voici ci-contre sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan.



1) Déterminez algébriquement les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

2) Calculez la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ de la surface grise.

Question 6 **(6 points)**

Résolvez dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant, puis donnez une interprétation géométrique.

$$\begin{cases} 2x + 6y + 3z + 3 = 3 \\ x + y + \frac{z}{2} + 2 = 0 \\ 6x - 2y - 5z = 4 \end{cases}$$

Question 7 **($1 + 2 + 4 + 1 + 1 + 1 = 10$ points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soient $A(6; -6;1)$ et $B(4; -2;4)$ deux points de l'espace.

Soit d la droite de représentation paramétrique : $d:\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 - 6t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1) Donnez une représentation paramétrique de la droite (AB).
2) Démontrez que les droites d et (AB) ne sont pas parallèles.
3) Démontrez que les droites d et (AB) sont coplanaires.
4) Déterminez les coordonnées du point d'intersection I de d et (AB).
5) Les droites d et (AB) sont-elles perpendiculaires ? Justifiez.
6) Le point $C(0; -2;1)$ appartient-il à la droite d ? Justifiez.