EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024 **QUESTIONNAIRE**							
Date :	07.06.24		*Horaire :*	08:15 - 10:15		*Durée :*	120 minutes
Discipline :	MATHE - MATH2	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GIN		
					Numéro du candidat :		

I. Probabilités et combinatoire *(3+[1+2+(3+4+4)] = 17 points)*

1) Démontrer que pour tous naturels n et k tels que $0 \leqslant k < n$, $\quad nC_{n-1}^{k} = (n-k)C_{n}^{k}$.

2) Douze groupes de jeunes musiciens participent à un concours national. Exactement deux groupes viennent d'Echternach. La moitié des groupes chante exclusivement des chansons en anglais, l'autre moitié exclusivement des chansons en langue luxembourgeoise.
Lors du concours, les douze groupes se produisent l'un après l'autre avec une chanson chacun. Une pause aura lieu après les six premières représentations. L'ordre de passage des groupes est tiré au sort.

   (a) Combien de possibilités y a-t-il pour l'ordre de passage des groupes ?

   (b) Combien de possibilités y a-t-il pour l'ordre de passage en tenant uniquement compte de si le groupe vient d'Echternach ou non ?

   (c) Calculer la probabilité des événements suivants :
   (Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.)
   A : « Les deux groupes d'Echternach se produisent après la pause. »
   B : « Les deux groupes d'Echternach se produisent directement l'un après l'autre avant la pause. »
   C : « Les groupes chantant en luxembourgeois et en anglais se produisent en alternance. »

II. Matrices *(5+(5+4+5+5) = 24 points)*

1) Démontrer le théorème suivant :
« Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.
Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, A admet une matrice inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. ».

2) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer l'inverse B^{-1} de la matrice B.

   (b) Démontrer que $BCB^{-1} = A$.

   (c) Démontrer, par un raisonnement par récurrence et sans utiliser les coefficients des différentes matrices, que pour tout entier naturel n,
   $$A^n = B \cdot C^n \cdot B^{-1}.$$

   (d) En déduire la matrice A^4 (préciser tous les coefficients).

III. Géométrie dans l'espace *((6+3)+4+2+(3+1) = 19 points)*

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(4;3;1)$, $B(4;6;4)$, $C(12;4;6)$, $D(12;\alpha;3)$ et $S(4;1;8)$, où α est un réel.

1) On considère le quadrilatère $ABCD$.

   (a) Déterminer la valeur de α pour que l'angle $\widehat{ADC}$ soit droit et les côtés $[AB]$ et $[DC]$ aient la même longueur.

   (b) Démontrer alors que $AD = BC$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par S et perpendiculaire au plan (ABC).

4) (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de cette droite d et du plan (ABC).

   (b) En déduire la distance du point S au plan (ABC).