EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024 **QUESTIONNAIRE**							
Date :	03.06.24		*Horaire :*	08:15 - 10:15		*Durée :*	120 minutes
Discipline :	MATHE - MATH2	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GIN		
						Numéro du candidat :	

I Probabilités et combinatoire $(5)+(1+2+2+2)+(2+3+3)=\ 20\ points$

1) Résoudre dans ℕ l'équation suivante : $\frac{18}{5}C_{n+1}^{2}-\frac{12}{5}C_{n}^{n-2}-30=0$.

2) Quatre tableaux carrés et deux tableaux rectangulaires sont alignés sur un mur. Chacun des tableaux est distinct des autres.
   a. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
   b. Quel est le nombre de dispositions possibles si les tableaux carrés sont d'un côté et les rectangulaires de l'autre ?
   c. Quel est le nombre de dispositions possibles si chaque tableau rectangulaire est intercalé entre deux tableaux carrés ?
   d. Quel est le nombre de dispositions possibles si les tableaux rectangulaires doivent rester l'un à côté de l'autre ?

3) Une agence de voyage organise des visites culturelles dans 8 villes de France comprenant les villes Paris, Metz, Lyon et Nancy.
   Chaque visite comprend 4 villes, chaque ville n'est visitée qu'une fois.
   L'ordre de passage dans les 4 villes choisies a de l'importance.
   Parmi toutes les visites possibles, on définit les événements suivants :

   A : « La visite débute à Metz » ;
   B : « La visite débute à Metz et comprend la visite de Lyon » ;
   C : « La visite comprend une visite à Paris et à Nancy ».

   Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ et donner les résultats sous forme de fraction irréductible.

II Matrices $(1{,}5+1{,}5)+(7+1{,}5)+(1{,}5+7)=\ 20\ points$

1) Vrai ou faux ? Justifier ! Une réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

   Soient A, B et C des matrices quelconques.

   a. Si $A\cdot B$ et $B+C$ sont définies, alors le nombre de colonnes de A est le même que le nombre de lignes de C.

   b. Si $A+B$ et $B+C$ sont définies, alors $A\cdot C$ est définie.

2) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer $C = B \cdot A^{-1} \cdot B^T$.

   b. Calculer l'inverse de C.

3) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que $M^2 = M + 2I$.

   b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \frac{2^n-(-1)^n}{3} M + \frac{2^n+2(-1)^n}{3} I$.

<u>III Géométrie dans l'espace</u> $(5) + (3{,}5 + 1{,}5) + (2 + 5 + 3) = 20\ points$

1) Démontrer le théorème suivant :

   On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ de l'espace et on considère quatre réels a, b, c et d tels que a, b et c ne soient pas nuls.
   L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

2) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On donne les points $A(1; 0; -2)$, $B(3; 1; 1)$ et $C(0; 2; 2)$.

   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

   b. Le plan (ABC) est-il parallèle à la droite $d: \begin{cases} x = 2k + 1{,}1 \\ y = 11k - 1 \\ z = 5k - 2{,}3 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$? Expliquer !

3) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On donne des équations cartésiennes de deux plans :

$$P_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad P_2 : x + y + z + 1 = 0$$

   a. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection de ces deux plans.

   c. Déterminer une équation cartésienne du plan P_3 passant par l'origine du repère et perpendiculaire à P_1 et P_2.