EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
QUESTIONNAIRE							
Date :	04.06.24		*Horaire :*	08:15 - 10:15		*Durée :*	120 minutes
Discipline :	Mathématiques Mathématiques 2	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GIG		
					Numéro du candidat :		

Question 1 **5 points**

Démontrez le théorème suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z',

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

Question 2 **11 points [4 + (3 + 4)]**

1. Montrez que $z = \dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{12}}{(1+i)^{20}}$ est un nombre réel.

2. On pose $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2} + \left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)i$

a. Déterminez la forme algébrique de z^2, puis le module et un argument de z^2.

b. Déduisez-en le module et un argument de z.

Question 3 **6 points (3 + 3)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

M est le point d'affixe $z = x + iy$, avec x, y réels.

A tout point M d'affixe $z \neq -i$, on associe le point M' d'affixe $Z = \dfrac{z-i-2}{z+i}$.

1. Exprimez la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

2. Déterminez l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M pour lesquels Z est imaginaire pur.

Question 4 **3 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Déterminez, par la **méthode géométrique**, l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M dont l'affixe z vérifie :

$$\left|\overline{z} - 3 + \frac{1}{2}i\right| = \left|iz - \frac{1}{2}i + 3\right|$$

Pour les questions 5 – 7, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

<u>Question 5</u>   14 points [5 + (2 + 4 + 3)]

*Les parties **1.** et **2.** sont indépendantes.*

1. La droite (*AB*) est définie par les points $A(0;1;-2)$ et $B(-2;1;4)$ et la droite Δ a pour représentation paramétrique :
$$\Delta \equiv \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3+t \\ z = 5+3t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Étudiez la position relative des droites (*AB*) et Δ.

2. On considère les trois plans
$$P_1 \equiv 3x+4y-2z+1=0$$
$$P_2 \equiv -x+3y-5z+1=0$$
$$P_3 \equiv 13x+26y-20z+7=0$$

a. Vérifiez que les plans P_1 et P_2 sont sécants (sans déterminer leur intersection).

b. Déterminez une représentation paramétrique de leur droite d'intersection *d*.

c. Étudiez la position relative de cette droite *d* et du plan P_3 et déduisez-en l'intersection des trois plans.

<u>Question 6</u>   14 points (2 + 4 + 1 + 2 + 5)

On donne les quatre points $A(2;1;-2)$, $B(-1;2;1)$, $C(-2;2;0)$ et $D(1;1;-2)$.

1. Vérifiez que les points *A, B* et *C* définissent un plan.

2. Vérifiez que $\vec{n}(-2;-12;2)$ est un vecteur normal au plan *(ABC),* puis déterminez une équation cartésienne du plan *(ABC).*

3. Vérifiez que le point *D* n'appartient pas au plan *(ABC)* .

4. Déterminez une représentation paramétrique de la droite *d* passant par *D* et perpendiculaire à *(ABC).*

5. Déterminez les coordonnées du point d'intersection *H* de cette droite *d* et du plan *(ABC).* Déduisez-en la distance du point *D* au plan *(ABC).*

<u>Question 7</u>   7 points (2 + 5)

On considère les deux plans
$$P_1 \equiv x+2y-4z=0$$
$$P_2 \equiv -2x+3y+1=0$$

1. Étudiez la position relative de P_1 et P_2.

2. Déterminez une équation cartésienne du plan *Q* perpendiculaire à P_1 et à P_2 et passant par $A(1;2;3)$.