EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024

QUESTIONNAIRE

Date :	07.06.2024	*Horaire :*	08 :15-11 :15	*Durée :*	180 minutes
Discipline :	MATHE MATH1	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GIG/GIN
				Numéro du candidat :	

Question 1 [(4+1) + 4 = 9 points]

1. **Démontrer :** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

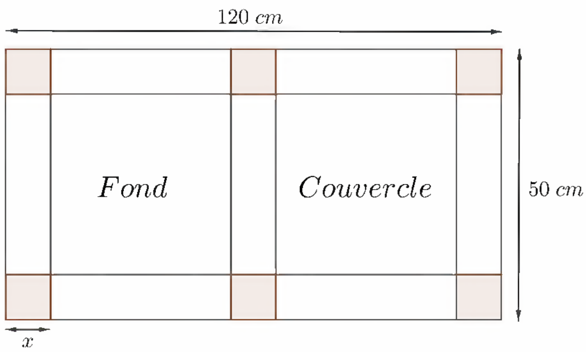
2. **Démontrer :**
   La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall\ x \in]0;+\infty[$: $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Question 2 [3 + 3 = 6 points]

Un pâtissier commande à une entreprise d'emballage des boîtes en carton pour ses gâteaux. Pour fabriquer une telle boîte à gâteaux, le fabricant utilise un carton rectangulaire de 120 cm de longueur et de 50 cm de largeur.

Six carrés identiques de longueur de côté x (en cm), avec $0 < x < 25$, sont découpés dans le carton comme illustré sur le croquis ci-contre.

Ensuite, la boîte est pliée. Le couvercle de la boîte entoure le fond sur trois côtés.



1. Montrer que le volume $\mathscr{V}$ (en cm^3) de la boîte est donné par :

$$\mathscr{V}(x) = 3x^3 - 195x^2 + 3000x$$

2. Déterminer la longueur du côté des petits carrés découpés pour que le volume $\mathscr{V}$ soit maximal et calculer le volume maximal en litres.

1/3

Question 3 [6 points]

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(2) - \ln(x) + \ln(-2x+8) - \ln(x+4)}$$

Question 4 [7 points]

Déterminer le tableau des signes de l'expression suivante :

$$f(x) = \ln(e^{-2x} - 3e^{-x} + 2) + 2x$$

Question 5 [3 + 2 + 3 + (1+2) = 11 points]

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{2\,x^2 - 3\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\,x^2 + 3\ln(x) - 3$$

Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le signe de $g(x)$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et interpréter graphiquement.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. (a) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$, notée Δ, dont on déterminera une équation.
   (b) Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

Question 6 [(2+2) + 3 = 7 points]

1. (a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right\}$:
   $$\frac{8}{9x^2 - 16} = \frac{a}{3x-4} + \frac{b}{3x+4}$$
   (b) En déduire : $I = \displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{8}{9x^2-16}\,\mathrm{d}x$
2. Calculer : $J = \displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{\ln(9x^2-16)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

   Le résultat sera donné sous la forme $a\ \ln(2) + b\ \ln(5) + c\ \ln(13)$ (a, b et $c \in \mathbb{R}$).

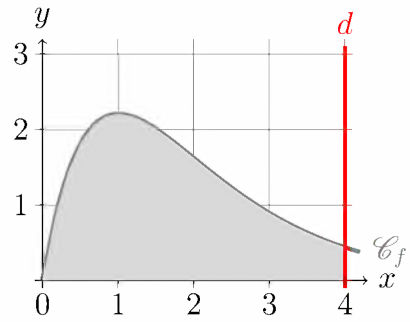
Question 7 [4 points]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6\,x\,e^{-x}$.

On note par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On note d la droite d'équation $x = 4$.

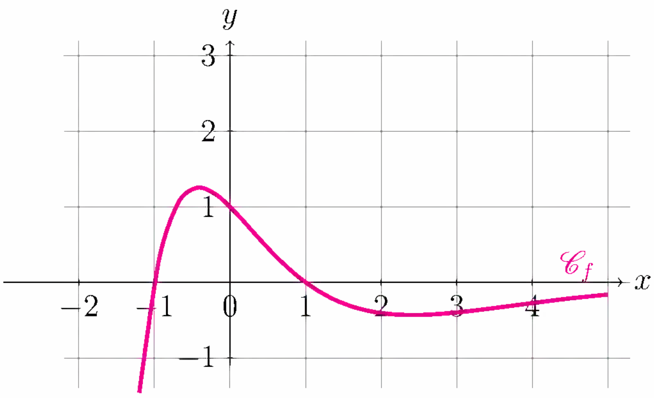
Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième près, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie grise délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et la droite d.



Question 8 [3 + 7 = 10 points] *(VRAI ou FAUX ?)*

Vérifier si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.

1. Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



Affirmation : *La primitive F de f admet deux extréma locaux.*

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Affirmation :

Il existe deux tangentes à $\mathscr{C}_g$ qui passent par l'origine O du repère.