EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES **Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT**					
Date :	05.06.23	*Durée :*	08:15 - 11:15	*Numéro candidat :*	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	*Section(s) :*	GSN		

Exercice 1 (3+3+4=10 Points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équation(s) suivantes :

1. $\ln(x-2)+\ln(x-32)=6\ln(2)$

2. $(\ln(x))^2-6=\ln(x)$

3. $\dfrac{1+\ln(x)}{2-\ln(x)}>0$

Exercice 2 (3+4+2+2=11 Points)

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=2\ln(x)-\left(\ln(x)\right)^2$.
On appelle sa courbe représentative C_f.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et interpréter graphiquement.

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Préciser les coordonnées des éventuels points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

4. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse e^4.

Exercice 3 (2+2+2+3=9 Points)

1. a. Soit la fonction F définie sur l’intervalle $I = [2\,;\,3]$ par :

$$F(x) = x\ln(x) + (4-x)\ln(4-x)$$

Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right).$$

b. En déduire la valeur exacte de l’intégrale :

$$\int_2^3 \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)dx$$

2. Soit la fonction g définie par $g(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{5x} + 3x - 5$ sur $]-\infty\,;0[$.

Déterminer les primitives G de g.

3. Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x+2}{(x^2+4x)^3}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Déterminer la primitive H de h qui vérifie $H(1) = 0$.

Exercice 4 (1+2+1+2+2=8 Points)

On a étudié l'évolution du nombre de cas de COVID-19 dans une ville du Luxembourg.
On note $f(t)$ le nombre de cas confirmés à l'instant t (exprimé en jours).
On admet que le nombre de cas confirmés $f(t)$ suit une croissance exponentielle, c'est-à-dire que :

$$f(t) = ae^{bt}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes réelles et } t \in [0\,;\,+\infty[.$$

1. On sait que le nombre de cas confirmés était de 10 personnes le jour 0 de l'étude. Déterminer la valeur exacte de la constante a.

2. On sait qu'après le 3ème jour (donc pour $t = 3$) le nombre de cas initial a doublé. Déterminer la valeur exacte de la constante b.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie pour $t \in [0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 10e^{\frac{\ln(2)}{3}t}$$

3. Déterminer le nombre de cas confirmés au bout de 10 jours. On arrondira le résultat obtenu à l'unité près.

4. Si aucune mesure n'est prise, comment va évoluer le nombre de cas à long terme ? Interpréter le résultat dans le contexte.

5. On souhaite déterminer au bout de combien de jours le nombre de cas confirmés sera de 5000. Déterminer la réponse, en arrondissant au jour le plus proche.

<u>Exercice 5 (2,5+2,5+3+2=10 Points)</u>

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x + 1 + xe^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Affirmation : « Cette fonction admet exactement une asymptote horizontale. »

2. Soit la fonction $g : x \mapsto x^2 - 10x + 9 + 12\ln(\sqrt{x})$, définie sur]0 ; +∞[et C_g sa courbe représentative dans le plan.

Affirmation : « La tangente à C_g au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite (D) : $y = -2x - 3$. »

3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

Affirmation : « La suite (u_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}^*$. »

4. Un joueur lance une fléchette sur une cible à 3 couleurs. On suppose que la fléchette touche toujours la cible.
Il atteint le rouge avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, le vert avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, sinon il atteint le jaune.
Il mise 2 euros, et gagne 5 euros s'il atteint le rouge, 1 euro s'il atteint le vert et ne gagne rien s'il atteint le jaune.
On appelle G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Affirmation : « Un joueur a intérêt à jouer à ce jeu, car ce jeu est favorable au joueur .»

<u>Exercice 6 (1+1+2+1=5 Points)</u>

On sait que la taille (en micromètres) des cellules d'une bactérie suit une loi uniforme sur l'intervalle [0,4 ; 1,6].

<u>Dans tout cet exercice, les résultats seront donnés en valeur exacte, puis arrondis à 0,01 près.</u>

1. Calculer la probabilité qu'une cellule bactérienne, choisie au hasard, ait une taille comprise entre 0,7 et 1,2 micromètres.

2. Calculer la probabilité qu'une cellule bactérienne, choisie au hasard, ait une taille inférieure à 0,8 micromètres.

3. Quelle est la taille T que doit avoir une cellule bactérienne, choisie au hasard, pour que la probabilité qu'elle ait une taille strictement supérieure à T soit égale à 0,2 ?

4. Quelle est la taille moyenne d'une cellule bactérienne ?

Exercice 7 (1+1+2+3=7 Points)

Le taux de magnésium dans le sang est un indicateur important de la santé d'une personne. On considère qu'un taux normal de magnésium dans le sang se situe entre $0{,}7$ et $1{,}1$ millimoles par litre (mmol/L).

On note X la variable aléatoire qui, à chaque personne choisie au hasard dans une population constituée uniquement de femmes, associe le taux de magnésium dans son sang en mmol/L.
X suit une loi normale d'espérance $\mu = 0{,}8$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}1$.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque personne choisie au hasard dans une population constituée uniquement d'hommes, associe le taux de magnésium dans son sang en mmol/L.
Y suit une loi normale d'espérance $\mu = 1{,}05$ et d'écart-type σ.

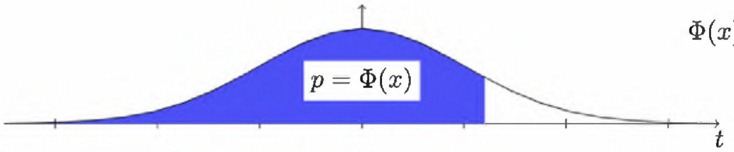
1. Calculer la probabilité $P(X \leq 0{,}95)$.

2. Calculer la probabilité que le taux de magnésium d'une femme soit exactement de 0,9 mmol/L.

3. Déterminer la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard dans la population des femmes ait un taux de magnésium compris entre 0,6 mmol/L et 0,9 mmol/L.

4. On choisit une personne au hasard dans la population constituée uniquement d'hommes. Déterminer σ sachant que la probabilité d'avoir un taux de magnésium inférieur à 1 mmol/L est de 0,0495. On arrondira la valeur obtenue au centième près.

Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$



$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt$$

$$\text{où } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

x	**3,0**	**3,1**	**3,2**	**3,3**	**3,4**	**3,5**	**3,6**	**3,7**	**3,8**	**3,9**
$\Phi(x)$	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,000

Quelques valeurs de Φ^{-1} :

p	0,9500	0,9750	0,9900	0,9950	0,9990	0,9995
$x = \Phi^{-1}(p)$	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0902	3,2905