

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES

Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	19.09.23	Durée :	08:15 - 11:15	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	Section(s) :	GSE		

Dans toutes les questions, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Question 1 (3 + 3 + 2 = 8 points)

Démontrer les théorèmes suivants :

- a) Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot e^x = 0$.
- b) Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier relatif p , $\ln a^p = p \ln a$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Question 2 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $[-2; +\infty[$ par $f(x) = 2x \cdot \ln(x^3 - x + 7)$.

Déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection éventuels entre la courbe représentative C_f et l'axe des abscisses.

Question 3 (3 + 6 = 9 points)

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $e^{\frac{x-2}{x}} = 2$.
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln [(\ln x)^2] \geq 0$.

Question 4 (5 points)

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{e^{x^2+x}}{(2-x)^2}$.

Déterminer l'abscisse du ou des points en lesquels la courbe C_f admet une tangente passant par le point $A(2; 0)$.

Question 5 (4 + 8 + 2 = 14 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}-x-1}{x}$.

C_f est la courbe représentative de la fonction f .

- a) Étudier les limites aux bornes du domaine.
 - b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^*$.
-

Question 6 (4 points)

Calculer la valeur exacte de $I = \int_{-1}^2 3 \ln(x+2) dx$.

Question 7 (3 + 3 + 2 = 8 points)

On considère les intégrales $I = \int_0^1 \sqrt{4x+5} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4x+5}} dx$.

- a) Exprimer I en fonction de J .
 - b) Calculer $I - 4J$.
 - c) En déduire les valeurs exactes de I et de J .
-

Question 8 (6 + 2 = 8 points)

Soit la droite d passant par le point $A(-12; 6; 11)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-4; 3; 1)$.

Soit la droite d' de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}t - 6 \\ y = 3t + 4 \\ z = -15t - 11 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- a) Étudier la position relative de d et d' .
 - b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de d' avec le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$.
-