

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES
Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	19.05.23	Durée :	08:15 - 11:15	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques	Section(s) :	GSE		

Dans toutes les questions, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Question 1 [4+4 = 8 points]

Démontrer les théorèmes suivants :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$;
2. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$: $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

Question 2 [3 points]

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3x^3 - 14x^2 - 7x + 10}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

Question 3 [2+3 = 5 points]

Soit la fonction f définie sur $[3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3-x}{\sqrt{x^2-9}}$ si $x \neq 3$ et $f(3) = 0$.

1. Déterminer si f est continue en 3.
2. Déterminer si f est dérivable en 3. Interpréter graphiquement le résultat.

Question 4 [4 points]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\ln \sqrt{5-2x} - \ln(x-1) = -\frac{1}{2} \ln(x+3).$$

Question 5 [4 points]

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1-2x}{e^{3x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Combien y a-t-il de tangentes à la courbe C_f passant par le point $A(2;0)$?

Question 6 [(1+2+2+1) + (2+3) = 11 points]

1. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2x + 3\ln(x) - 4$.
 - a) Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition.
 - b) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
 - c) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $]0; +\infty[$.
Donner un encadrement de α à 0,01 près.
 - d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 2. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - 1 + \frac{1-3\ln(x)}{x}$.
 - a) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
 - b) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f .
-

Question 7 [3+3 = 6 points]

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 4e^{-x})$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que C_f admet une asymptote oblique d en $+\infty$, dont on déterminera une équation.
 2. Étudier la position de C_f par rapport à d .
-

Question 8 [2+2+1 = 5 points]

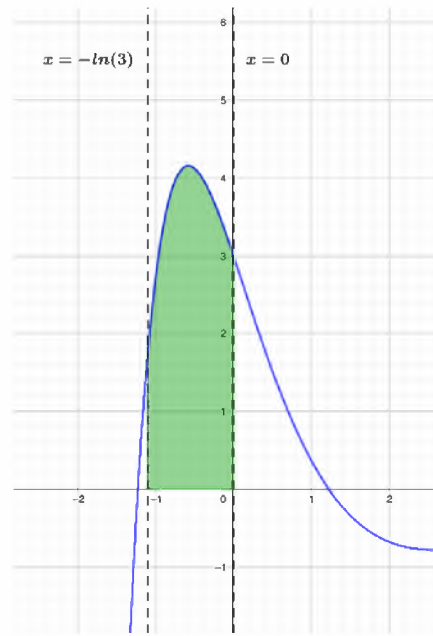
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 3x - 4}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$: $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+4}$.
 2. Calculer et donner la valeur exacte de $I = \int_2^3 \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 3x - 4} dx$.
 3. Calculer et donner la valeur exacte de $J = \int_{\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}}}^2 \frac{\ln(2x+5)}{2x+5} dx$.
-

Question 9 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x^2 + 3)e^{-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (voir graphique ci-dessous).

Calculer la valeur exacte et donner la valeur approchée à 0,01 près de l'aire A , exprimée en u.a. du domaine délimité par l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\ln 3$ et $x = 0$.

**Question 10 (1+2+2+3 = 8 points)**

1. On considère les plans P_1 et P_2 définis par :

$$P_1: 5x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad P_2: x - 4y + 3z - 1 = 0$$

- Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants (sans déterminer leur intersection).
- Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ .

2. Soit le plan P_3 d'équation $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

- Étudier la position relative de Δ et du plan P_3 .
 - En déduire l'intersection des plans P_1 , P_2 et P_3 .
-