

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES
Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	20.09.23	Durée :	08:15 - 10:15	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques 2		Section(s) :	GIN	

I Probabilités et Combinatoire

$5 + (2 + 4 + 1) + (2 + 2 + 2) = 18 \text{ points}$

- 1) Résoudre dans $\mathbb{N}$: $3 C_{n+2}^n = 5 C_n^2 - 41$.
- 2) Un sac contient 7 boules noires et 4 boules blanches, toutes indiscernables au toucher. On choisit au hasard et simultanément 3 boules du sac.
 - a) De combien de façons peut-on tirer 3 boules du sac ?
 - b) Soit B la variable aléatoire qui représente le nombre de boules blanches tirées du sac. Déterminer la loi de probabilité de B (les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles).
 - c) Déterminer l'espérance mathématique de B sous forme d'une fraction irréductible.
- 3) Une boîte contient 9 fiches numérotées de 1 à 9 qui sont indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et sans remise 4 fiches de cette boîte pour former un nombre de 4 chiffres.

(Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.)

 - a) Combien de nombres différents peuvent être générés de cette façon ?
 - b) Quelle est la probabilité que le nombre formé contienne les chiffres 1, 2, 3 et 9 dans n'importe quel ordre ?
 - c) Quelle est la probabilité que les 4 chiffres soient tirés dans l'ordre décroissant ?

II Matrices

$(6 + 1 + 1 + 3) + (1 + 1 + 5 + 2 + 1) = 21 \text{ points}$

- 1) Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et le système $(S) \begin{cases} x + 2y + 3z - 15 = 0 \\ y - x + 2z - 7 = 0 \\ 2x + z - y - 10 = 0 \end{cases}$.
 - a) Démontrer que A est inversible et déterminer les coefficients de A^{-1} .
 - b) Déterminer l'écriture matricielle du système (S) .
 - c) A l'aide du résultat de la question a), démontrer que (S) est un système de Cramer.
 - d) Résoudre le système (S) .

- 2) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et soit I la matrice unité d'ordre 2.
- Calculer B^2 .
 - Soit $C = I + 3B$. Déterminer tous les coefficients de la matrice C .
 - Montrer à l'aide des résultats précédents et par un raisonnement par récurrence que :
Pour tout nombre naturel n , $C^n = \begin{pmatrix} 1 + 6n & -6n \\ 6n & 1 - 6n \end{pmatrix}$.
 - Montrer que C est inversible et que $C^{-1} = I - 3B$.
 - Vrai ou Faux ? Justifier.
Pour toute matrice carrée M d'ordre 2, $MC = O \Leftrightarrow M = O$,
où O est la matrice carrée nulle d'ordre 2.

III Géométrie dans l'espace

(4 + 2) + 3 + (2 + 4) + (3 + 3) = 21 points

On considère un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

- Démontrer les théorèmes suivants :
 - On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
 - On considère deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ de l'espace.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx' + yy' + zz' = 0$.
- Soient les points $E(2;4;5)$ et $F(4; -4;3)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{M}$ médiateur du segment $[EF]$.
- Soient les points $A(0;7;3)$, $B(4;1;1)$ et $C(1;5;2)$.
 - Vérifier que les points A , B et C définissent un plan (ABC) .
 - Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
- Soient deux droites d et Δ ainsi qu'un plan $\mathcal{P}: x + 2y + 3z + 19 = 0$.

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Delta: \begin{cases} x = 2s - 3 \\ y = 1 - s \\ z = s + 1 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

- Déterminer l'intersection entre d et Δ .
- Déterminer l'intersection entre d et $\mathcal{P}$.