EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES **Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT**					
Date :	19.05.23	*Durée :*	08:15 - 10:15	*Numéro candidat :*	
Discipline :	**Mathématiques - Mathématiques 2**	*Section(s) :*	**GIN**		

I. Probabilités et combinatoire

(4+(2+1+2+2+2)+6 = 19 points)

1) Démontrer que pour tous naturels n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, $\quad C_{n+1}^{k} = C_{n}^{k-1} + C_{n}^{k}$.
2) À partir des cinq chiffres 1, 2, 2, 3, 4, on veut former tous les nombres possibles à cinq chiffres.
   (a) Combien de nombres peut-on former ?
   (b) Parmi tous ces nombres, combien commencent par 1 ?
   (c) Parmi tous ces nombres, combien commencent par 2 ?

   Les nombres sont classés par ordre croissant. Le premier nombre de la liste est donc 12 234 et le dernier nombre de la liste est 43 221.

   (d) Sans énumérer les nombres de la liste, déterminer le nombre qui se trouve en position 37. Justifier.
   (e) À quelle position de la liste se trouve 13 224 ? Expliquer comment on peut trouver ce résultat sans énumérer les nombres de la liste.
3) Quatre chaussures sont prises au hasard sur une étagère contenant cinq paires de chaussures différentes. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une paire ?

II. Matrices

((2+2)+[(1+2+3)+(2+2)]+(2+4) = 20 points)

1) Démontrer :
   « Soit A une matrice carrée inversible d'ordre d. Soient M et N des matrices carrées de même ordre. Soit O la matrice nulle d'ordre d.

   (a) Si $AM = O$, alors $M = O$. *(b) Si $AM = AN$, alors $M = N$. »*
2) Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que :

$$A^2 + A + I = O \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(avec } I \text{ la matrice unité et } O \text{ la matrice nulle d'ordre 2).}$$

   (a) i. Exprimer A^2 en fonction de A et de I.
   ii. Démontrer que $A^3 = I$.
   iii. Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout naturel n, $A^{3n} = I$.

   (b) i. Démontrer que $A^{2023} = A$
   ii. Préciser tous les coefficients de A^{2023}.
3) On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & -b \\ 0 & b & 1-b \end{pmatrix}$.
   (a) Pour quelles valeurs de b, la matrice B est-elle inversible ?
   (b) Calculer dans ce cas son inverse B^{-1} en fonction de b.

III. Géométrie dans l'espace

(1+3+4+5+5+3 = 21 points)

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère

- les points $A(4;0;4)$ et $B(2;6;0)$,
- le plan $\mathscr{P}$: $2x-y+2z+2=0$,
- la droite $\boldsymbol{d}$ de représentation paramétrique

$$\boldsymbol{d}:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 0 \\ z & = & 2t \end{array}\right. \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

1) Vérifier que le point A appartient à la droite $\boldsymbol{d}$ et que le point B appartient au plan $\mathscr{P}$.
2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection C du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\boldsymbol{d}$.
3) Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ au dixième de degré près.
4) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{R}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et contenant la droite $\boldsymbol{d}$ et le point A.
5) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$.
6) Soit $D(-\alpha;2+2\alpha;2\alpha)$ un point de la droite Δ, où α est un nombre réel.
   Déterminer les coordonnées de D pour que le triangle ACD soit rectangle en A.