EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES

Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	20.09.23	Durée :	08:15 - 10:15	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques 2	Section(s) :	GIG		

Question 1

(6p)

Démontrez que pour tous les nombres complexes non nuls z et z' on a :

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \quad (mod\ 2\pi)$$

Pour les questions 2 – 4, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\boldsymbol{O}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$.

Question 2

(2p+2p=4p)

M est le point d'affixe $z = x + yi$ avec x et y réels.

A tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = (z + 2i) \cdot (\bar{z} + 1 - 4i)$.

a) Exprimez la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

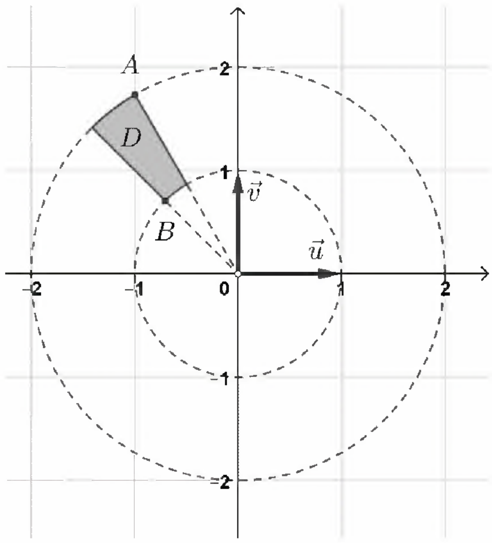
b) Déterminez l'ensemble ***E*** des points M pour lesquels z' est imaginaire pur.

Question 3

(4p)

On donne les points A et B d'affixes $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a représenté le domaine D (avec frontières comprises) de points M dont l'affixe z a pour module r et pour argument θ. Caractérisez D à l'aide de r et θ.



Question 4

(4p+3p+3p=10p)

On donne les nombres complexes :

$$z_1 = 2\,i\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}}.$$

a) Écrivez z_1, z_2 et $z_3 = \frac{z_1^2}{z_2}$ sous forme algébrique.

b) Écrivez z_1, z_2 et $z_3 = \frac{z_1^2}{z_2}$ sous forme exponentielle.

c) Déduisez des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Pour les questions 5-8 l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(\boldsymbol{O}; \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$.

Question 5

(2p+2p+1p+4p+1p=10p)

On donne les points $A(2;\ -1;\ -1)$, $B(1;1;0)$, $C(3;\ -3;\ -2)$ et le plan $P : x - 2y - z + 13 = 0$.

a) Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Montrez que (AB) et P sont perpendiculaires.

c) Montrez que $C \in (AB)$.

d) Déterminez les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur P.

e) Déduisez-en la distance du point C au plan P (valeur exacte).

Question 6

(2p+2p+4p+2p=10p)

On considère la droite d passant par les points $A(-3\ ;\ -6\ ;\ 4)$ et $B(-1\ ;\ -2\ ;\ 2)$.

a) Vérifiez que la droite d a pour représentation paramétrique $d\colon \begin{cases} x = -2 + s \\ y = -4 + 2s \\ z = 3 - s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$.

b) On considère de plus la droite d' définie par $d'\colon \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Montrez que les droites d et d' ne sont pas parallèles.

c) Déterminez les coordonnées du point I, point d'intersection des deux droites.

d) Justifiez que les droites sont perpendiculaires.

Question 7

(2p+4p+4p=10p)

On considère les plans :

$P_1 : -x + y - z + 2 = 0$ et $P_2 : x - 2y + 4z - 7 = 0$.

a) Vérifiez que les plans P_1 et P_2 sont sécants (sans déterminer leur intersection).

b) Déterminez une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.

c) Déterminez une équation cartésienne du plan P_3 perpendiculaire à P_1 et P_2 et passant par $A(1;\ 1;\ 2)$.

Question 8

(2p+2p+2p=6p)

On donne les points $A(-1;\ 4;\ 2)$, $B(-1; -2; 3)$ et $C(2;\ 2;\ 3)$.

Est-ce que les affirmations suivantes sont exactes ? Justifiez !

a) Le triangle ABC est rectangle en C.

b) L'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{2}$ u.a.

c) La mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est $55°$ (arrondie à l'unité).