EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES

Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	05.06.23	*Durée :*	08:15 - 10:15	*Numéro candidat :*	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques 2	*Section(s) :*	GIG		

Question 1 [6 + 3 + 2 = 11 points]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

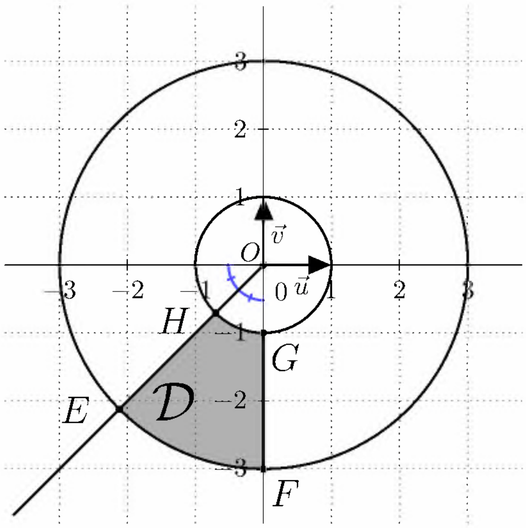
On donne les points d'affixes respectives $z_A = -2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = \dfrac{6\sqrt{3}+6i}{-3+i\sqrt{3}}$.

1. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et sous forme algébrique.
2. Quelle est la nature du triangle OAB? Justifier.
3. Montrer que $Z = \dfrac{(z_B)^4}{(\overline{z_A})^5}$ est un imaginaire pur.

Question 2 [2 points]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On a représenté ci-contre le domaine $\mathcal{D}$, frontières comprises, de points M dont l'affixe z a pour module r et pour argument θ.
Caractériser $\mathcal{D}$ à l'aide de r et/ou de θ.



Question 3 [4 + 3 = 7 points]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
M est le point d'affixe $z = x + i\,y$ avec x, y réels.
À tout point M d'affixe $z \neq 3i$, on associe le point M' d'affixe $Z = \dfrac{i\,\overline{z} - 1 + 5i}{\overline{z} + 3i}$.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M pour lesquels Z est un réel.

Question 4 [5 points]

Démontrer le théorème suivant :
Si dans un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *on a :* $\vec{u}\,(x; y; z)$ *et* $\vec{v}\,(x'; y'; z')$,
alors les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ *sont*

$$(yz' - zy'; -(xz' - zx'); xy' - yx').$$

Question 5 [(2 + 5) + (1 + 3) = 11 points]

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On donne les points $A\,(1; 4; -3)$, $B\,(9; -2; -5)$ et les droites d et d' définies par :

$$d : \begin{cases} x = 6t \\ y = -3 - \dfrac{9}{2}t \\ z = 8 - \dfrac{3}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad d' : \begin{cases} x = -5 + \dfrac{1}{2}s \\ y = 2 - s \\ z = -1 + 5s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Les droites (AB) et d sont-elles coplanaires? Justifier.
2. Les droites d et d' sont-elles perpendiculaires? Justifier.
3. (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection C de la droite d avec le plan $\left(O; \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
   (b) Calculer l'aire du triangle ABC (*valeur exacte*).

Question 6 [2 + (2 + 2 + 2) + (1 + 2 + 3 + 1) = 15 points]

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On donne les points $A\,(3; -2; -1)$, $B\,(-4; -1; 3)$, $C\,(0; -2; 5)$ et le plan $\mathcal{P} : -4x+y-5z-12 = 0$.

1. La droite (AB) est-elle parallèle au plan $\mathcal{P}$? Justifier.
2. (a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) $\mathcal{Q}$ est le plan passant par A et contenant la droite (BC). Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$.
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$.
3. (a) Vérifier que le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par A et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
   (c) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan $\mathcal{P}$.
   (d) En déduire la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ (*valeur exacte*).

Question 7 [2 + 4 + 3 = 9 points]

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On donne les plans :

$$\mathcal{P}_1 : 3x + 2y + 3z + 4 = 0; \quad \mathcal{P}_2 : 8x + 3y - 6z = 15; \quad \mathcal{P}_3 : -5x - y + 9z - 19 = 0.$$

1. Vérifier (sans déterminer leur intersection) que les deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection Δ des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
3. Étudier la position relative de la droite Δ et du plan $\mathcal{P}_3$ et en déduire l'intersection des trois plans.