EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES

Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	15.09.23	*Durée :*	08:15 - 11:15	*Numéro candidat :*	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques 1	*Section(s) :*	GIG / GIN		

Question 1 (5 + 2 + 2 = 9 pts)

Démontrer les théorèmes suivants :

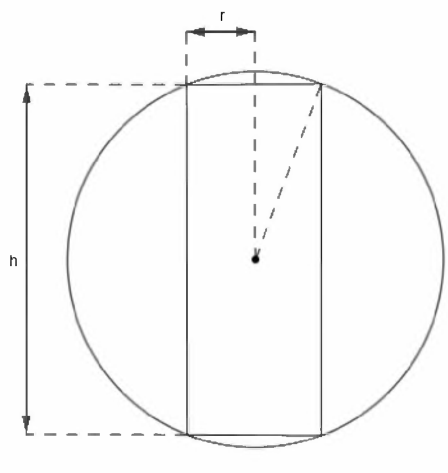
1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
3) Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Question 2 (4 + (3 + 1) = 8 pts)

Une entreprise veut fabriquer un calendrier de l'avent contenant des boules sphériques qu'on peut suspendre au sapin de Noël. La surprise se trouvera à l'intérieur d'une boîte de forme cylindrique contenue dans la sphère.

Une telle sphère a un diamètre de 12 cm. La boîte a pour rayon r (en cm) et pour hauteur h (en cm) avec $0 < h < 12$.

On cherche à déterminer les dimensions (rayon et hauteur) du cylindre pour obtenir une boîte de volume maximal.



1) Démontrer que le volume du cylindre en cm^3 peut s'écrire sous la forme

$$V(h) = \frac{\pi}{4}(-h^3 + 144h)$$

2) a) Déterminer la hauteur h et le rayon r du cylindre pour lesquels le volume de la boîte est maximal (valeurs exactes et valeurs approchées au dixième de cm près).

   b) Déterminer la valeur exacte de ce volume en cm^3, puis une valeur approchée au cm^3 près.

Question 3 (3 + 4 = 7 pts)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $25 + 18e^{-x} < 3e^x$
2) $2\ln(x-1) - \ln(3x) \leq \ln(3x-6) - 3\ln 2$

Question 4 (1 + 3 + 2 + 4 + 3 = 13 pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 4)$.

Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$.
2) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition et interpréter les résultats graphiquement.
3) Montrer que la droite $d: y = 2x$ est asymptote oblique à C_f.
4) Déterminer la position de C_f par rapport à d.
5) Dresser le tableau de variations de f.

Question 5 (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x) - x$.

Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Déterminer le nombre de tangentes à C_f passant par le point $A(2; -1)$.

Question 6 (4 + 3 = 7 pts)

Soient les intégrales

$$I = \int_1^e (x-2)\ln x \, dx \qquad et \qquad J = \int_1^e \frac{(x-1)^2 \ln x}{x} \, dx$$

a) Déterminer la valeur exacte de I.
b) Déterminer la valeur exacte de $I - J$. En déduire la valeur exacte de J.

Question 7 (4 + 4 = 8 pts)

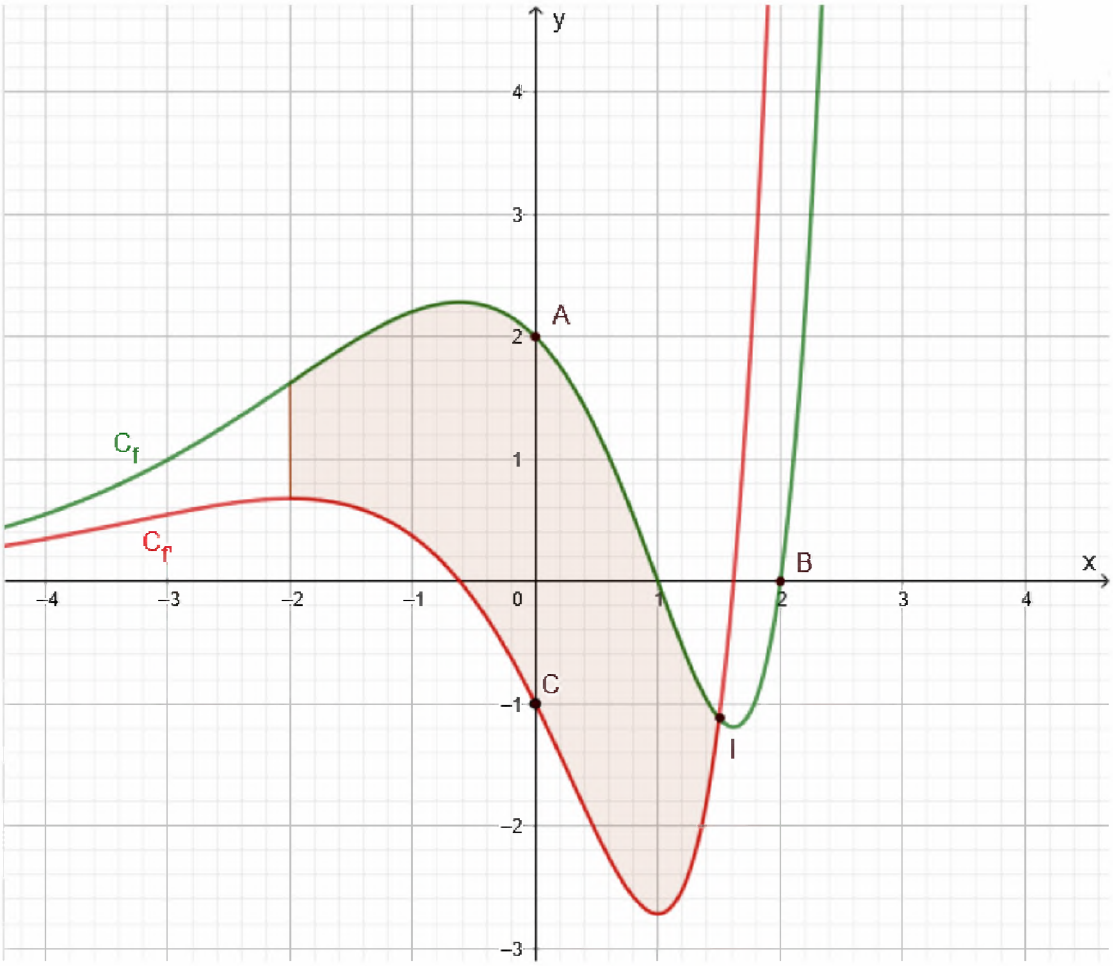
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x\left(ax^2 + bx + c\right)$ où a , b et c sont trois réels.

Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes C_f et $C_{f'}$ où :

C_f est la courbe représentative de f

$C_{f'}$ est la courbe représentative de sa dérivée.

1) En utilisant le graphique, déterminer a, b et c.



2) On admet que :

$$f(x) = e^x(x^2 - 3x + 2)$$
$$f'(x) = e^x(x^2 - x - 1)$$

Déterminer l'abscisse du point d'intersection I de C_f et $C_{f'}$ puis déterminer l'aire A de la partie colorée.