EXAMEN DE FIN D’ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES **Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT**					
Date :	15.05.23	*Durée :*	08:15 - 11:15	*Numéro candidat :*	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques 1	*Section(s) :*	GIG / GIN		

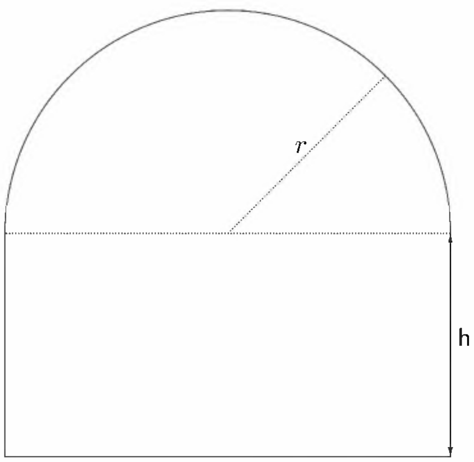
Question 1 [(3+4) + 2 = 9 points]

1. **Démontrer :**
   Pour tout entier $n, n \geq 1$:
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
   (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0$
2. **Démontrer :** Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(a\,b) = \ln(a) + \ln(b)$

Question 2 [5 + 3 = 8 points]

La section transversale d’un tunnel a la forme d’un rectangle surmonté d’un demi-cercle de rayon r (en m) avec : $0 < r < \dfrac{24}{\pi + 2}$.

Un côté du rectangle mesure h (en m). Le périmètre $\mathscr{P}$ du tunnel mesure 24 m.



1. Montrer que l’aire $\mathscr{A}$ de la section transversale du tunnel est donnée par :
$$\mathscr{A}(r) = 24\,r - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\, r^2$$
2. Quelles doivent être les dimensions exactes de r et de h du tunnel pour que l’aire $\mathscr{A}$ soit maximale ?

Question 3 [4 + 6 = 10 points]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $e^{2x+1} \geq e^{\frac{3}{x}}$
2. $\ln(2x) = \ln\sqrt{13x-5} - \ln\sqrt{x+1}$

Question 4 [2 + 2 + 5 = 9 points]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x}$.

Soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Est-ce que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ? Justifier.

1. **Affirmation 1 :** *f est continue en 0.*
2. **Affirmation 2 :** *$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale.*
3. **Affirmation 3 :** *Il existe trois tangentes à $\mathscr{C}_g$ qui passent par le point $A(1;0)$*

Question 5 [3 + 3 + 3 = 9 points]

Soit f la fonction définie sur $I =]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}\ln(x-1)$.

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

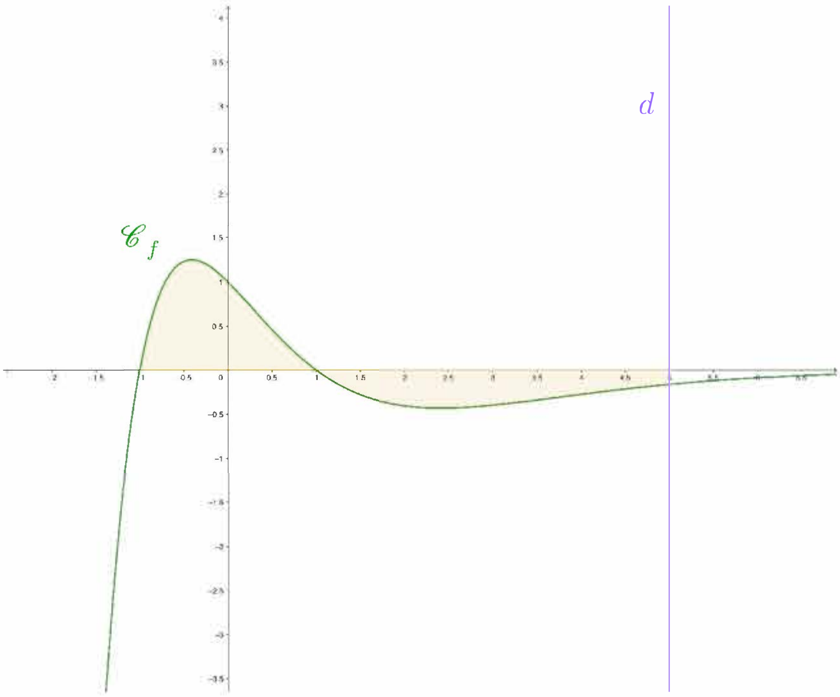
1. Montrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ avec $g(x) = 2x+1-3\ln(x-1)$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$.
3. Donner le tableau de variations complet de f.

Question 6 [1 + 7 = 8 points]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$.

On note par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On note d la droite d'équation $x = 5$.



1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie colorée délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et la droite d.

Question 7 [5 + 2 = 7 points]

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 7}{(x + 2)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que :

   $$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} : f(x) = a + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$$

2. Calculer l'intégrale suivante sur l'intervalle $]-\infty; -2[$:

   $$\mathscr{I} = \int f(x)\, \mathrm{d}x$$