LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques	**E, F, G**	*Durée de l'épreuve :* *140 minutes* *Date de l'épreuve :* *18/09/2020*

Numéro du candidat : ______________________________

Instructions

- L'élève indique ci-dessus son numéro de candidat.
- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement 1 question par groupe de questions de la partie au choix. Il indique obligatoirement ses choix en marquant d'une croix les cases appropriées ci-dessous.

Seules les réponses correspondant aux questions choisies par l'élève seront évaluées. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix clairement renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (40 points)

Question 1 : Système d'équations	8 points
Question 2 : Problème d'optimisation	13 points
Question 3 : Etude de fonction	9 points
Question 4 : Equations exponentielles et logarithmiques	10 points

Partie au choix (20 points)

*Groupe n°1 (**Cocher une case** parmi les 2 questions ci-dessous)*

☐ **Question 5 a :**	Coût moyen	9 points
☐ **Question 5 b :**	Probabilités	

*Groupe n°2 (**Cocher une case** parmi les 2 questions ci-dessous)*

☐ **Question 6 a :**	Intérêt / probabilités	11 points
☐ **Question 6 b :**	Nombre dérivé / tangente	

Partie obligatoire (40 points)

Question 1 (8 points)

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{y+2}{5} - \frac{z+3}{4} = -1 \\ -5x - y = -2z \\ 5(x-y) + 2(z+y) = 5(z-3) \end{cases}$$

Question 2 (13 points)

Une entreprise produit et vend deux modèles de casques de ski :

- Le modèle *classique* est produit sur une machine en 100 min et nécessite 100 g de fibre de carbone pour sa fabrication. Il est vendu 100 € l'unité.
- Le modèle *hors-piste*, à protection renforcée, est produit également en 100 min sur la même machine, mais il nécessite 3 fois plus de fibre de carbone que le modèle *classique*. Il est vendu 200 € l'unité.

L'entreprise utilise au plus 1800 g de fibre de carbone par jour. La machine de fabrication peut être utilisée au maximum pendant 16 h et 40 min par jour.

Le gérant de l'entreprise a décidé de limiter la production du modèle *classique* à 8 exemplaires par jour.

Déterminer le nombre de casques de chaque modèle à réaliser quotidiennement pour que la recette soit maximale. Quelle est cette recette maximale ?

Question 3 (4+3+2=9 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 12x + 5$.

1) Dresser le tableau de variation de f et préciser les extrema éventuels.

2) Dresser le tableau de concavité de f et préciser les points d'inflexion éventuels.

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente t_1 au graphe de f au point d'abscisse 1.

Question 4 (3+3+(2+2)=10 points)

1) Résoudre les équations suivantes et donner les ensembles de solutions (sans préciser les conditions d'existence) :

a) $7 - 4 \cdot 2^{3x+1} = 4 + 3 \cdot 2^{3x+1}$

b) $5\log_3(2-x) - 8 = 6 - 2\log_3(2-x)$

2) Soient a et b deux réels strictement positifs. Sachant que $\log a = 3$ et $\log b = -2$, calculer :

a) $\log \frac{b^2}{a^3}$

b) $\log \sqrt{ab^2}$

Partie au choix (20 points)

N'oubliez pas de cocher les cases correspondantes sur la page de garde !

Groupe n°1 (à choisir : soit **Question 5 a**, soit **Question 5 b**)

Question 5 a ((1+3)+(2+3)=9 points)

Une entreprise produit des bodys pour bébés. On a pu établir que le coût de production journalier de x bodys s'exprime par :

$$C(x) = 100 - 10x + x^2 \quad \text{avec } 5 \leq x \leq 30 .$$

1) Le coût unitaire moyen de production est défini par : $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

a) Exprimer le coût unitaire moyen en fonction de x.

b) Déterminer la quantité de bodys à fabriquer pour que le coût unitaire moyen soit minimal. Que vaut ce coût minimal ?

2) Chaque body est vendu 30 € l'unité.

a) Exprimer, en fonction de x, le bénéfice $B(x)$ réalisé par la vente de x bodys.

b) Déterminer la quantité de bodys à vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Que vaut ce bénéfice maximal ?

Question 5 b (2+3+(2+2)=9 points)

Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule mauve.

1) En tirant simultanément 4 boules de cette urne, calculer la probabilité d'obtenir exactement deux boules jaunes.

2) En tirant successivement et sans remise 3 boules de cette urne, calculer la probabilité d'obtenir au moins 2 boules rouges.

3) En tirant successivement et avec remise 3 boules de cette urne, calculer la probabilité d'obtenir

a) 3 boules de la même couleur ;

b) 1 boule mauve et 2 boules blanches.

Groupe n°2 (à choisir : soit **Question 6 a**, soit **Question 6 b**)

Question 6 a ((1+3) + (3+2+2)=11 points)

1) Un capital de 20 000 € est placé à un taux annuel de 0,8%. Soit $C(t)$ la valeur acquise de ce capital (par intérêts composés) après t années.

a) Donner l'expression de $C(t)$.

b) Après combien d'années, le capital aura-t-il augmenté de 10% ?

2) Dans un lycée, tous les élèves doivent choisir entre les sections E, F ou G. Il y a autant de filles que de garçons.

40% des élèves ont choisi la section E, dont 70% sont des filles. 20% des filles ont choisi la section F. 35% des élèves ont choisi la section G.

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

	Section E	Section F	Section G	Totaux
Filles				
Garçons				
Totaux				

On choisit un élève au hasard.

b) Déterminer la probabilité que l'élève choisi soit une fille sachant qu'elle est en section F.

c) Déterminer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon n'ayant pas choisi la section E.

Question 6 b (4+(4+3)=11 points)

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-2}{7x+3}$.

En utilisant la définition, calculer le nombre dérivé de f en -1.

2) Soient la droite $d \equiv y = -2x - 3$ et la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1$.

a) Déterminer, par calcul, les abscisses des points pour lesquels la tangente au graphe de f est parallèle à d.

b) Déterminer les équations de ces tangentes.