LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques	E, F, G	*Durée de l'épreuve :* 2h20 *Date de l'épreuve :* 10 juin 2020

PARTIE OBLIGATOIRE

Question 1 (8 points)

$$\begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ \dfrac{4x-9y}{3}=-4-3z \\ 8(x-y)-5(x+z)=-4y-20z+2 \end{cases} \quad | \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ 4x-9y=-12-9z \\ 8x-8y-5x-5z=-4y-20z+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ 4x-9y+9z=-12 \\ 3x-4y+15z=2 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2-4L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-3L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ -y-3z=-4 \\ 2y+6z=8 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3+2L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=-2 & (1) \\ -y-3z=-4 & (2) \\ 0y+0z=0 & (3) \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé.
Posons $z=\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
Alors : (2) $y=4-3\alpha$
(1) $x=2(4-3\alpha)-3\alpha-2=8-6\alpha-3\alpha-2=6-9\alpha$

Finalement : $\boxed{\mathcal{S}=\{(6-9\alpha;\ 4-3\alpha;\ \alpha)\mid \alpha \in \mathbb{R}\}}$

ou $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left(-6+3\alpha;\alpha;\ -\frac{1}{3}\alpha+\frac{4}{3}\right)\mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}}$ ou $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left(\alpha;\ 2+\frac{1}{3}\alpha;\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\alpha\right)\mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}}$

Question 2 (12 points)

Soit x le nombre de camionnettes de modèle A et soit y le nombre de camionnettes de modèle B.
Il faut résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 4x + 2y \geq 16 \\ 2x + 2y \geq 12 \\ 4x + 8y \geq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ y \geq -2x + 8 \\ y \geq -x + 6 \\ y \geq -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

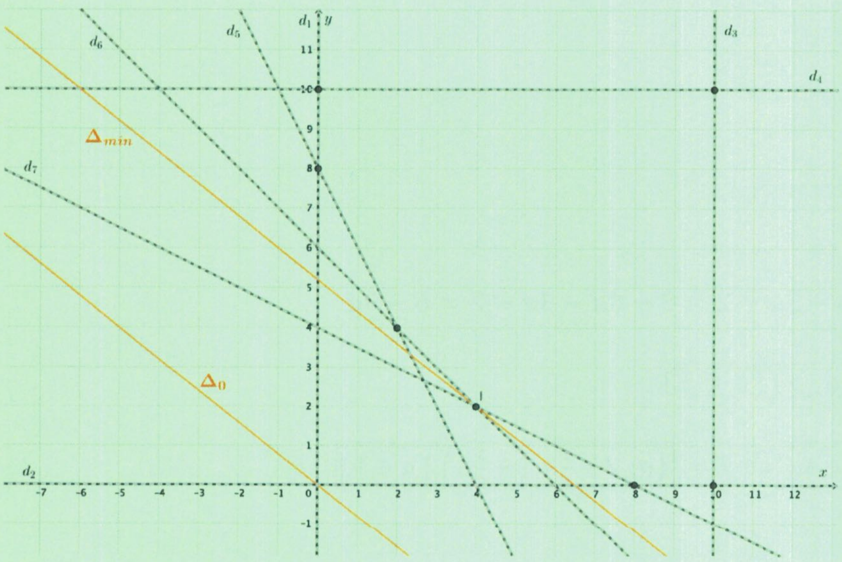
Soit $d_1 \equiv x = 0$.
Soit $d_2 \equiv y = 0$.
On considère l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont positives.

Soit $d_3 \equiv x = 10$.
Soit $d_4 \equiv y = 10$.
On considère l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont inférieures ou égales à 10.

Soit $d_5 \equiv y = -2x + 8$.
Point-test : O(0; 0)
$0 < -2 \cdot 0 + 8$, donc O n'appartient pas au demi-plan d'inéquation $y \geq -2x + 8$.

Soit $d_6 \equiv y = -x + 6$.
Point-test : O(0; 0)
$0 < -0 + 6$, donc O n'appartient pas au demi-plan d'inéquation $y \geq -x + 6$.

Soit $d_7 \equiv y = -\frac{1}{2}x + 4$
Point-test : O(0; 0)
$0 < -\frac{1}{2} \cdot 0 + 4$, donc O n'appartient pas au demi-plan d'inéquation $y \geq -\frac{1}{2}x + 4$.



La fonction « coûts de location » est donnée par $C(x; y) = 40x + 50y$.

Posons $\Delta_0 \equiv 40x + 50y = 0$.

La droite Δ_{min} parallèle à Δ_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus proche de l'origine passe par le sommet I.

Δ_{min} passe par le point I, point d'intersection des droites d_6 et d_7. Par lecture graphique, on trouve $I(4;2)$.

Le magasin de meubles doit louer 4 camionnettes du modèle A et 2 camionnettes du modèle B afin de minimiser les coûts de location.

Le coût minimal est alors égal à $C(4;2) = 40 \cdot 4 + 50 \cdot 2 = 260$ €.

Question 3 (2+6+6=14 points)

1) $\log\frac{a^4}{\sqrt{b}} = \log a^4 - \log\sqrt{b} = 4\log a - \frac{1}{2}\log b = 4 \cdot 5{,}2 - \frac{1}{2} \cdot (-3{,}2) = 22{,}4.$

2)

a)

$$\begin{array}{lll}
 & \log_2(5x+1) - 4 = 0 & \\
\Leftrightarrow & \log_2(5x+1) = 4 & \\
\Leftrightarrow & 5x + 1 = 2^4 & |-1 \\
\Leftrightarrow & 5x = 15 & |:5 \\
\Leftrightarrow & x = 3 & \\
 & \mathcal{S} = \{3\} &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lll}
 & 3 \cdot 6^{2x} - 9 = 16 - 2 \cdot 6^{2x} & |+2 \cdot 6^{2x} + 9 \\
\Leftrightarrow & 5 \cdot 6^{2x} = 25 & |:5 \\
\Leftrightarrow & 6^{2x} = 5 & \\
\Leftrightarrow & \log 6^{2x} = \log 5 & \\
\Leftrightarrow & 2x \cdot \log 6 = \log 5 & |:2\log 6 \\
\Leftrightarrow & x = \frac{\log 5}{2\log 6} = \frac{1}{2}\log_6 5 & \\
 & \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\log_6 5\right\} &
\end{array}$$

3) $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent des asymptotes horizontales, ce sont donc des graphes de fonctions exponentielles.
Comme $f(1) = 3$, on trouve $f(x) = 3^x$.
Comme $g(1) = 0{,}5$, on trouve $g(x) = 0{,}5^x$.

$\mathcal{C}_h$ admet une asymptote verticale, donc il s'agit du graphe d'une fonction logarithme.
Comme $h(2{,}5) = 1$, on trouve $h(x) = \log_{2{,}5} x$.

Question 4 **(5+2=7 points)**

$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$

1) $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = 0$

$\Delta = 36$ $\quad x_1 = -1$ $\quad x_2 = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$		$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{29}{2}$	$\searrow$	

f admet un minimum en $x = -1$ de valeur $-\frac{3}{2}$ et un maximum en $x = 3$ de valeur $\frac{29}{2}$.

2) L'équation réduite de la tangente t au point d'abscisse 1 est donnée par :

$t \equiv y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$t \equiv y = 6(x-1) + \frac{13}{2}$

$t \equiv y = 6x + \frac{1}{2}$

PARTIE AU CHOIX (19 points)

Groupe n°1

Question 5a) **(2+3+2+2=9 points)**

1) $f(x) = \frac{450}{x} - 8 + 2x$

$f(30) = \frac{C(30)}{30} = \frac{450 - 8\cdot 30 + 2\cdot 30^2}{30} = \frac{450 - 240 + 2\cdot 900}{30} = 67$

Le coût unitaire moyen pour une production de 30 appareils est de 67 €.

2) $f'(x) = -\frac{450}{x^2} + 2 = \frac{-450+2x^2}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -450 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 225 \Leftrightarrow x = 15$ ou $x = -15$ (à écarter)

x	1		15		40
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		52	$\nearrow$	

Le coût unitaire moyen est minimal pour une production de 15 appareils.

Le coût unitaire moyen vaut alors $f(15) = \frac{450}{15} - 8 + 2\cdot 15 = 52$ €.

3) $R(x) = 80x$

$B(x) = R(x) - C(x) = 80x - (450 - 8x + 2x^2) = -2x^2 + 88x - 450$

4) $B'(x) = -4x + 88$
$B'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 88 = 0 \Leftrightarrow x = 22$

x	0	22	40
$B'(x)$	+	0	−
$B(x)$	↗	518	↘

Le bénéfice est maximal pour la production et la vente de 22 unités.
<u>Remarque</u> : L'élève n'a pas besoin de calculer la valeur du bénéfice maximal.

Question 5b) (5+4=9 points)

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

	Hommes	Femmes	Enfants	Total
Nationalité luxembourgeoise	27%	25,5%	8,5%	61%
Autre nationalité	18%	4,5%	16,5%	39%
Total	45%	30%	25%	100%

2)

a) p(enfant luxembourgeois) $= \frac{8,5}{100} = \frac{17}{200} = 0,085$ (8,5%)

b) p(luxembourgeois sachant enfant) $= \frac{8,5}{25} = \frac{17}{50} = 0,34$ (34%)

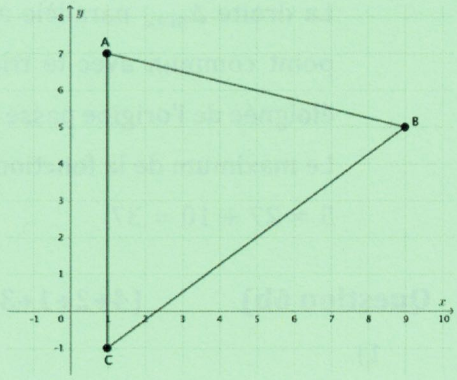
c) p(femme sachant autre nationalité) $= \frac{4,5}{39} = \frac{9}{78} = \frac{3}{26} \simeq 0,1154$ ($\simeq$ 11,54%)

d) p(homme sachant luxembourgeois) $= \frac{27}{61} \simeq 0,4426$ ($\simeq$ 44,26%)

<u>Groupe n°2</u>

Question 6a) (4+4+2=10 points)

1)



- Équation de la droite (AC) : $(AC) \equiv x = 1$
- Équation de la droite (AB) :
  - Calcul de la pente : $a = \frac{5-7}{9-1} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$
  - Calcul de l'ordonnée à l'origine b :

$$A(1;7) \in (AB) \Leftrightarrow y_A = -\frac{1}{4} \cdot x_A + b \Leftrightarrow 7 = -\frac{1}{4} \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{29}{4}$$

Donc : $(AB) \equiv y = -\frac{1}{4}x + \frac{29}{4}$

- Équation de la droite (BC) :
  - Calcul de la pente : $a = \frac{-1-5}{1-9} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$
  - Calcul de l'ordonnée à l'origine b :

$$C(1;-1) \in (BC) \Leftrightarrow y_C = \frac{3}{4} \cdot x_C + b \Leftrightarrow -1 = \frac{3}{4} \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{7}{4}$$

Donc : $(BC) \equiv y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

2)

- $(AC) \equiv x = 1$

  Le point de coordonnées $(2;3)$ appartient au demi-plan des solutions et $2 > 1$.

  L'inéquation $x \geq 1$ fait partie du système.

- $(AB) \equiv y = -\frac{1}{4}x + \frac{29}{4}$

  Le point de coordonnées $(2;3)$ appartient au demi-plan des solutions et

  $3 < -\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{29}{4}$.

  L'inéquation $y \leq -\frac{1}{4}x + \frac{29}{4}$ fait partie du système.

- $(BC) \equiv y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

  Le point de coordonnées $(2;3)$ appartient au demi-plan des solutions et

  $3 > \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{7}{4}$.

  L'inéquation $y \geq \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$ fait partie du système.

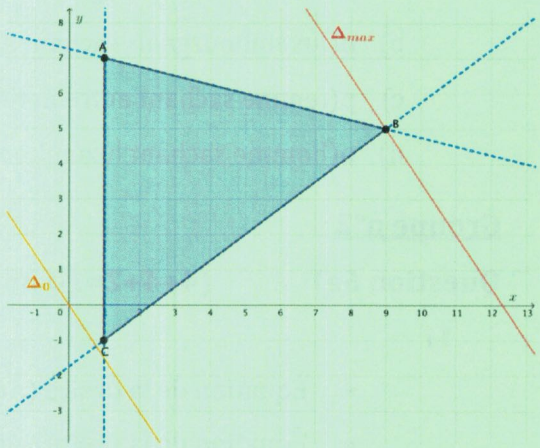
Le système d'inéquations correspondant au triangle ABC est donc :

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x + \frac{29}{4} \\ y \geq \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x + 4y \leq 29 \\ -3x + 4y \geq -7 \end{cases}$$

3) Posons $\Delta_0 \equiv 3x + 2y = 0$.

La droite Δ_{max} parallèle à Δ_0 qui a au moins un point commun avec le triangle et qui est la plus éloignée de l'origine passe par le sommet B.

Le maximum de la fonction est $f(9;5) = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = 27 + 10 = 37$.



Question 6b) (4+2+1+3=10 points)

1)

a) On peut former $5! = 120$ mots différents.

b) Il y a deux A dans le mot CHAPEAU.

On peut former $\frac{7!}{2!} = 2520$ mots différents.

c) Si les voyelles doivent rester ensemble, on peut former $3! \cdot 3! \cdot 4 = 144$ mots différents.

2) On peut former $C_{12}^{3} \cdot C_{8}^{2} = 220 \cdot 28 = 6160$ groupes différents.

3) L'élève peut répondre de $5^{10} = 9765625$ manières différentes.

4) Il y a $C_4^2 \cdot C_{28}^6 = 6 \cdot 376740 = 2260440$ mains de 8 cartes choisies dans un jeu de 32 cartes qui contiennent exactement deux dames.

La probabilité d'obtenir une telle main vaut $\frac{C_4^2 \cdot C_{28}^6}{C_{32}^8} = \frac{966}{4495} \simeq 0{,}2149$ ($\simeq 21{,}5\%$).