LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques	E, F, G	*Durée de l'épreuve :* *2 heures* *Date de l'épreuve :* *06 juin 2019*

Partie I : Systèmes d'équations et d'inéquations

Question 1 (8 points)

$$\begin{cases} z-2y=-4-x \\ 3(x-2)-2(y+3)=-(x+z)+5 \\ \dfrac{x-y}{3}-\dfrac{2x-y}{4}=\dfrac{z}{6}+1 \qquad \Big|\cdot 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=-4 \\ 3x-6-2y-6=-x-z+5 \\ 4x-4y-6x+3y=2z+12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=-4 & (1) \\ 4x-2y+z=17 & (2) \qquad \big|4\cdot(1)-(2) \\ -2x-y-2z=12 & (3) \qquad \big|2\cdot(1)+(3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=-4 & (1) \\ -6y+3z=-33 & (2)' \\ -5y=4 & (3)' \end{cases}$$

De $(3)': y=-\dfrac{4}{5}$

Dans $(2)': 3z=-33+6\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{-165-24}{5}=\dfrac{-189}{5}\Big|\cdot\dfrac{1}{3}$

$$z=-\frac{63}{5}$$

Dans $(1): x=2\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{63}{5}-4=\dfrac{-8+63-20}{5}=\dfrac{35}{5}$

$$S=\left\{\left(\frac{35}{5};-\frac{4}{5};-\frac{63}{5}\right)\right\}$$

Question 2 (12 points)

Soit *x* le nombre de jus de fruits de type A et *y* le nombre de jus de fruits de type B.

Il faut résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 200x \leq 16000 \\ 150x + 200y \leq 25000 \\ 0{,}5x + 1{,}5y \leq 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 80 \\ 3x + 4y \leq 500 \\ x + 3y \leq 300 \end{cases}$$

Soit $d_1 \equiv x = 80$

Point-test : O(0 ;0)

$0 \leq 80$ donc O appartient au demi-plan d'inéquation $x \leq 80$ (demi-plan solution)

Soit $d_2 \equiv 3x + 4y = 500 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 125$

Point-test : O(0 ;0)

$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \leq 500$ donc O appartient au demi-plan d'inéquation $3x + 4y \leq 500$ (demi-plan solution)

Soit $d_3 \equiv x + 3y = 300 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 100$

Point-test : O(0 ;0)

$0 + 3 \cdot 0 \leq 300$ donc O appartient au demi-plan d'inéquation $x + 3y \leq 300$ (demi-plan solution)

Soient $d_4 \equiv x = 0$ et $d_5 \equiv y = 0$.

Il faut considérer l'ensemble de points du plan dont les coordonnées sont positives.

La recette est donnée par $R(x,y) = x + 2y$

Soit $\Delta_0 \equiv x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$

Δ_{max} passe par le point I, point d'intersection de d_2 avec d_3.

$$I(x,y) \in d_2 \cap d_3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 125 & (1) \\ y = -\frac{1}{3}x + 100 & (2) \end{cases}$$

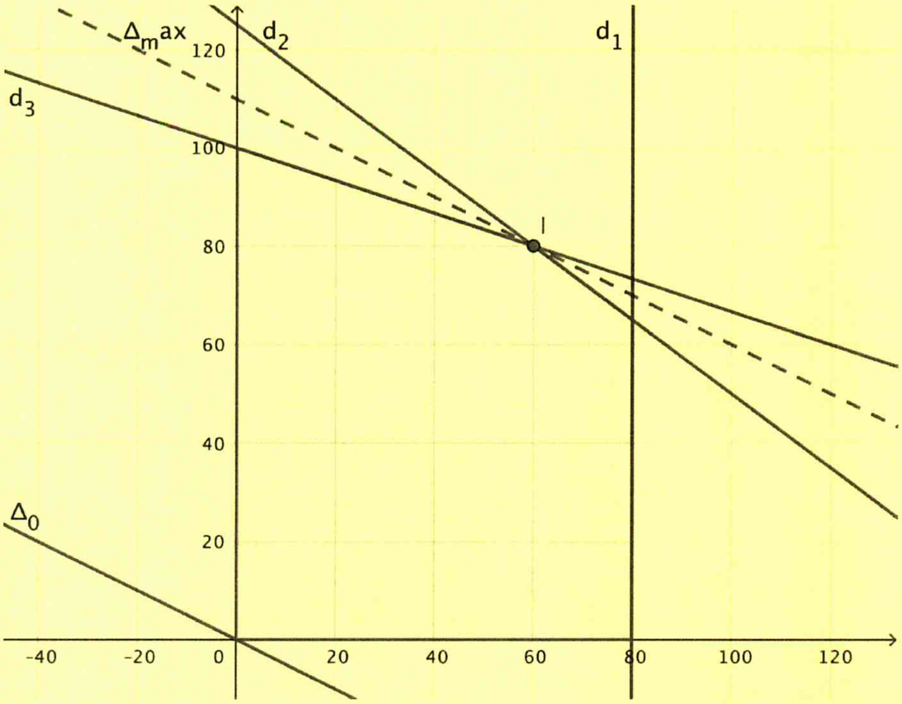
(1) dans (2) : $-\frac{3}{4}x + 125 = -\frac{1}{3}x + 100 \Leftrightarrow 5x = 300 \Leftrightarrow x = 60$

Dans (2) : $y = -\frac{1}{3} \cdot 60 + 100 = 80$

D'où $I(60;80)$

La recette est maximale pour la vente de 60 jus du type A et 80 jus du type B.

Elle vaut : $R(60;80) = 60 + 2 \cdot 80 = 220$ €



Partie II : Analyse

Question 3 (4 + 3 + 2 = 9 points)

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+3$$

1) $f'(x)=\frac{2}{3}\cdot 3x^2+\frac{1}{2}\cdot 2x-6\cdot 1=2x^2+x-6$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-6=0$

$\Delta=1+48=49$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{4}=\left\langle \begin{matrix}-2\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\right.$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		↗	$\frac{35}{3}$ Max	↘	$-\frac{21}{8}$ min	↗	

$f(-2)=\frac{2}{3}\cdot(-2)^3+\frac{1}{2}\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)+3=\frac{35}{3}\simeq 11{,}67$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-6\cdot\frac{3}{2}+3=-\frac{21}{8}=-2{,}625$

2) $f''(x) = 4x + 1$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$

Tableau de concavité

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{4}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
G_f		$\dfrac{217}{48}$ PI	

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + 3 = \frac{217}{48} \simeq 4{,}52$$

G_f admet un point d'inflexion $I\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{217}{48}\right)$.

3) $f(0) = 3$ et $f'(0) = -6$

Équation de la tangente t au point d'abscisse 0 :

$t \equiv y - 3 = -6x \Leftrightarrow y = -6x + 3$

Question 4 (3 + 3 + 4 = 10 points)

1)

a)

$1 - 4\cdot 2^{3x} = 3\cdot 2^{3x} - 13 \quad \left| -3\cdot 2^{3x} - 1\right.$

$\Leftrightarrow -7\cdot 2^{3x} = -14 \quad \left| :(-7)\right.$

$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2$

$\Leftrightarrow 3x = 1 \quad \left| :3\right.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

$S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

b) CE : $7 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{3}$

$7 = \log_3(7 - 3x) + 3 \quad \left| -3\right.$

$\Leftrightarrow \log_3(7 - 3x) = 4 \quad \left| 3^x\right.$

$\Leftrightarrow 7 - 3x = 3^4 \quad \left| -7\right.$

$\Leftrightarrow -3x = 81 - 7$

$\Leftrightarrow -3x = 74 \quad \left| :(-3)\right.$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{74}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{74}{3}\right\}$

2) a) $\log\dfrac{a^2}{b} = 2\log a - \log b = 2\cdot 3 - (-2) = 6 + 2 = 8$

b) $\log\left(\sqrt{a}\cdot b^3\right) = \dfrac{1}{2}\log a + 3\log b = \dfrac{1}{2}\cdot 3 + 3\cdot(-2) = \dfrac{3}{2} - 6 = -\dfrac{9}{2}$

Question 5 (4 points)

- C_2 et C_3 admettent des asymptotes horizontales donc ce sont des graphes de fonctions exponentielles.
- C_1 et C_4 admettent des asymptotes verticales donc ce sont des graphes de fonctions logarithmiques.

De plus : $f_1(1)=3$, donc $G_{f_1}=C_3$ De plus : $f_2(0)=-2$, donc $G_{f_2}=C_4$

De plus : $f_3(0)=-1$, donc $G_{f_3}=C_2$ De plus : $f_4(3)=0$, donc $G_{f_4}=C_1$

Partie III : Probabilités et combinatoire

Question 6 (3 + 2 + 2 = 7 points)

1)

	Formule A	Formule B	Totaux
Filles	23,12%	29,7%	52,82%
Garçons	10,88%	36,3%	47,18%
Totaux	34%	66%	100%

Calculs :

$0{,}68 \cdot 34 = \%23{,}12\%$ $\quad 34 - 23{,}12 = 10{,}88\%$

$0{,}55 \cdot 66\% = 36{,}3\%$ $\quad 66 - 36{,}3 = 29{,}7\%$

$23{,}12 + 29{,}7 = 52{,}82\%$ $\quad 10{,}88 + 36{,}3 = 47{,}18\%$

2) p(garçon et formule A) = 10,88 %

3) p(formule B sachant fille) = $\dfrac{29{,}7}{52{,}82} = \dfrac{1485}{2641} \simeq 56{,}23\%$

Question 7 (5 (1 + 2 + 2) + 5 (1 + 2 + 2) = 10 points)

1) Tirage sans ordre de 3 boules parmi 7 + 4 + 3 = 14 boules

a) Nombre de tirages possibles : $C_{14}^{3} = 364$

b) A : tirer deux boules blanches parmi 7 et une boule rouge parmi 4.

Nombre de cas favorables : $C_7^2 \cdot C_4^1 = 84$

p(A) = $\dfrac{84}{364} = \dfrac{3}{13} \simeq 0{,}23$

c) B : tirer 3 boules de la même couleur, donc 3 boules blanches parmi 7 ou 3 boules rouges parmi 4 ou 3 boules vertes parmi 3

Nombre de cas favorables : $C_7^3 + C_4^3 + C_3^3 = 40$

$$p(B) = \frac{40}{364} = \frac{10}{91} \simeq 0,11$$

2) Tirage avec ordre et avec remise de 3 boules parmi 14 boules.

a) Nombre de tirages possibles : $B_{14}^3 = 14^3 = 2744$

b) A : tirer deux boules blanches parmi 7 suivie d'une boule rouge parmi 4.

Nombre de cas favorables : $B_7^2 \cdot B_4^1 = 7^2 \cdot 4^1 = 196$

$$p(A) = \frac{196}{2744} = \frac{1}{14} \simeq 0,07$$

c) B : tirer 3 boules de la même couleur, donc 3 boules blanches parmi 7 ou 3 boules rouges parmi 4 ou 3 boules vertes parmi 3

Nombre de cas favorables : $B_7^3 + B_4^3 + B_3^3 = 7^3 + 4^3 + 3^3 = 434$

$$p(B) = \frac{434}{2744} = \frac{31}{196} \simeq 0,16$$