Examen 1EFG – Session 2018

Corrigé modèle

Partie I

Question 1 - (8 points)

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-1+z-y}{5} + \frac{z}{10} = 0 & E_1 \\ 5y = 2(2+x+2y) - 3(z+1) & E_2 \\ 4x - 2y = -2 + 6z & E_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1) - 2(x-1+z-y) + z = 0 & E_1 \leftarrow 10E_1 \\ 5y = 4 + 2x + 4y - 3z - 3 & \\ 4x - 2y - 6z = -2 & \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5 - 2x + 2 - 2z + 2y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ 4x - 2y - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ 4x - 2y - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 & \\ 7x - 7z = 1 & E_2 \longleftarrow E_1 - 2E_2 \\ 7x - 7z = 1 & E_3 \longleftarrow E_1 + E_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 & \\ 7x - 7z = 1 & \\ 0x = 0 & E_3 \longleftarrow E_2 - E_3 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $x = r$ avec $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ -7z = 1 - 7r \\ x = r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ z = -\dfrac{1}{7} + r \\ x = r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10}{7} - r \\ z = -\frac{1}{7} + r \\ x = r \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{\left(r\ ; \frac{10}{7} - r\ ;\ -\frac{1}{7} + r\right)\ , r \in \mathbb{R}\right\}$

En posant $y = r$, on obtient $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{10}{7} - r\ ;\ r\ ;\ \frac{9}{7} - r\right)\ , r \in \mathbb{R}\right\}$

En posant $z = r$, on obtient $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{7} + r\ ;\ \frac{9}{7} - r\ ;\ r\right)\ , r \in \mathbb{R}\right\}$

Question 2 - (9 points = 6+3)

1. Equation réduite de (AE)

   Comme $x_A = x_E = -2$, $(AE) \equiv x = -2$

   Equation réduite de (DE)

   Comme $y_D = y_E = -\frac{3}{2}$, $(DE) \equiv y = -\frac{3}{2}$

   Equation réduite de (BC)

   Comme $x_B \neq x_C$, l'équation est de la forme $y = ax + b$

   - $a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}}{3 - \frac{3}{2}} = -2$
   - $C\left(3\ ;\ \frac{3}{2}\right) \in (BC)$ $\Leftrightarrow y_C = -2x_C + b$

     $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = -6 + b$

     $\Leftrightarrow b = \frac{15}{2}$ Ainsi $(BC) \equiv y = -2x + \frac{15}{2}$

Equation réduite de (AB)

Comme $x_B \neq x_A$, l'équation est de la forme $y = cx + d$

- $c = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}{\frac{3}{2} - (-2)} = \frac{2}{7}$
- $A\left(-2\ ;\ \frac{7}{2}\right) \in (AB) \quad \Leftrightarrow\ y_A = \frac{2}{7}x_A + d$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} = -\frac{4}{7} + d$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{57}{14}$$

Ainsi $(AB) \equiv y = \frac{2}{7}x + \frac{57}{14}$

Equation réduite de (CD)

Comme $x_C \neq x_D$, l'équation est de la forme $y = mx + p$

- $m = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$
- $C\left(3\ ;\ \frac{3}{2}\right) \in (CD) \quad \Leftrightarrow\ y_C = \frac{6}{5}x_C + p$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{18}{5} + p$$

$$\Leftrightarrow p = -\frac{21}{10}$$

Ainsi $(CD) \equiv y = \frac{6}{5}x - \frac{21}{10}$

Système d'inéquations :

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -\frac{3}{2} \\ y \leq -2x + \frac{15}{2} \\ y \leq \frac{2}{7}x + \frac{57}{14} \\ y \geq \frac{6}{5}x - \frac{21}{10} \end{cases}$$

2. $f(x\,;y) = 9x + 5y$

Soit la droite $d_0 \equiv 9x + 5y = 0$

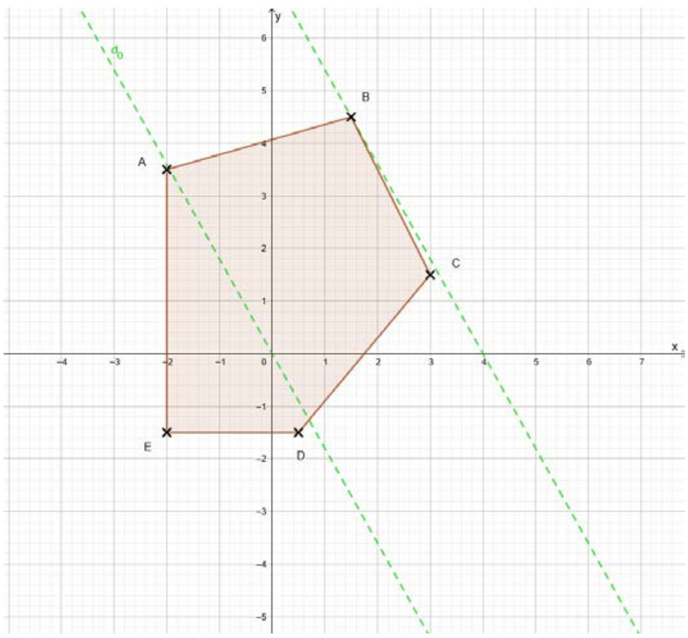
$$\Leftrightarrow y = -\frac{9}{5}x$$

Le maximum se trouve au point B et ce maximum vaut :

$$f\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right) = 9 \cdot \frac{3}{2} + 5 \cdot \frac{9}{2}$$

$$= \frac{27}{2} + \frac{45}{2}$$

$$= 36$$



Partie II

Question 3 - (15 points = (1+5)+(1,5+4,5)+3)

1. a) $C(q) = q^2 - 10q + 361$ avec $q \in [1\,;200]$

   $C_m(q) = \frac{C(q)}{q} = q - 10 + \frac{361}{q}$

   b) Etudions la fonction C_m :

   $C'_m(q) = 1 - \frac{361}{q^2} = \frac{q^2-361}{q^2}$

   Racines de C'_m :

   $C'_m(q) = 0 \Leftrightarrow q^2 - 361 = 0$

   $\Leftrightarrow q = 19$ ou $\cancel{q = -19}$

q	1		19		200
$C'_m(q)$		$-$	0	$+$	
$C_m(q)$	352	$\searrow$	28	$\nearrow$	$\frac{38361}{200}$

   L'entreprise doit fabriquer 19 robes pour obtenir un coût unitaire moyen minimal de 28 €.

2. a) $B(q) = 150q - C(q) = 150q - q^2 + 10q - 361 = -q^2 + 160q - 361$

   b) Etudions la fonction B :

   $B'(q) = -2q + 160$

   Racines de B' :

   $B'(q) = 0 \Leftrightarrow -2q + 160 = 0$

   $\Leftrightarrow q = 80$

q	1		80		200
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	-202	$\nearrow$	6039	$\searrow$	-8361

   Pour obtenir un bénéfice maximal de 6 039 €, l'entreprise doit produire et vendre 80 robes.

   c) L'entreprise ne fait aucune perte si son bénéfice est positif. Etudions les racines puis le signe de la fonction B :

   $B(q) = 0 \Leftrightarrow -q^2 + 160q - 361 = 0$

   $\Delta = 160^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-361) = 24\,156$

   $q_1 = 80 + 3\sqrt{671} \approx 157{,}7$

   $q_2 = 80 - 3\sqrt{671} \approx 2{,}29$

q	1		$80 - 3\sqrt{671}$		$80 + 3\sqrt{671}$		200
$B(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Pour ne pas faire de pertes, la production et la vente doivent être comprises entre 3 et 157 robes.

Question 4 - (9 points = (3+3)+(1,5+1,5))

1. Equations :

a) $3 \cdot 7^{2-x} - 7 = 8 - 2 \cdot 7^{2-x}$

$\Leftrightarrow\ 5 \cdot 7^{2-x} = 15$

$\Leftrightarrow\ 7^{2-x} = 3$

$\Leftrightarrow\ 7^{2-x} = 7^{\log_7 3}$

$\Leftrightarrow\ 2 - x = \log_7 3$

$\Leftrightarrow\ x = 2 - \log_7 3$ Ainsi, $\mathcal{S} = \{2 - \log_7 3\}$

b) $4 + \log_5(-1 - 3x) = 7$ $\underline{CE:}\ -1 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\ \log_5(-1 - 3x) = 3$

$\Leftrightarrow\ \log_5(-1 - 3x) = \log_5 5^3$

$\Leftrightarrow\ -1 - 3x = 5^3$

$\Leftrightarrow\ -1 - 3x = 125$

$\Leftrightarrow\ 3x = -126$

$\Leftrightarrow\ x = -42$ Ainsi, $\mathcal{S} = \{-42\}$

2. $\log a = 2$ et $\log b = -3$

a) $\log(ab)^3 = 3 \cdot \log(ab)$

$= 3(\log a + \log b)$

$= 3\ (2 - 3)$

$= -3$

b) $\log\sqrt{\frac{a}{b}} = \log\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{a}{b}\right)$

$= \frac{1}{2}(\log a - \log b)$

$= \frac{1}{2}(2 + 3)$

$= \frac{5}{2}$

Partie III

Question 5 - (10 points = 4+(2+2+2))

1. Tableau :

	Allemande	Française	Japonaise	Total
Femme	9 %	21,12 %	20,8 %	50,92 %
Homme	33,4 %	5,28 %	10,4 %	49,08 %
Total	42,4 %	26,4 %	31,2 %	100 %

2. a) $p(homme\ et\ française) = 5{,}28\ \%$

   b) $p(femme\ sachant\ allemande) = \frac{9}{42{,}4} = \frac{45}{212} \approx 21{,}22\ \%$

   c) $p(allemande\ sachant\ homme) = \frac{33{,}4}{49{,}08} = \frac{835}{1227} \approx 68{,}05\ \%$

Question 6 - (9 points = (3+2)+(2+2))

1. a) Il faut distinguer les cas :

   - 3 cœurs non valet et 1 valet non cœur : $C_{12}^3 \cdot C_3^1 = 660$
   - 2 cœurs non valet et 1 valet de cœur et aucun autre valet et 1 autre carte (ni valet ni cœur) : $C_{12}^2 \cdot C_1^1 \cdot C_3^0 \cdot C_{36}^1 = 2\,376$

   Ainsi, $p(tirer\ exactement\ 3\ coeurs\ et\ un\ valet) = \frac{660+2376}{270\,725} = \frac{3\,036}{270\,725} \approx 1{,}12\ \%$

   b) $p(tirer\ au\ moins\ une\ dame) = 1 - p(ne\ tirer\ aucune\ dame)$

   $$= 1 - \frac{C_4^0 \cdot C_{48}^4}{C_{52}^4} = 1 - \frac{194580}{270725} = \frac{15\,229}{54\,145} \approx 28{,}13\ \%$$

2. a) 4 cartes successivement et sans remise → Arrangements sans répétition

   $$p(tirer\ 4\ trèfles) = \frac{A_{13}^4}{A_{52}^4} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6\,497\,400} = \frac{17\,160}{6\,497\,400} = \frac{11}{4165} \approx 0{,}26\ \%$$

   b) $p(tirer\ un\ roi\ suivi\ d'une\ dame\ sachant\ que\ les\ deux\ premières\ cartes\ sont\ des\ rois)$

   $$= \frac{2}{50} \cdot \frac{4}{49} = \frac{4}{1225} \approx 0{,}33\ \%$$