Corrigé modèle

Question 1 **(6 points)**

$$\begin{cases} 3x+y-4z=1 \\ 7(x-1)-6z=1-y \\ \frac{2x}{3}-\frac{4y+2}{5}=\frac{2z}{3}+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-4z=1 \\ 7x+y-6z=8 \\ 10x-12y-10z=51 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-4z=1 \\ 4x \quad -2z=7 \\ 46x \quad -58z=63 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+12\cdot L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-4z=1 \\ 4x \quad -2z=7 \\ -70x \quad =-140 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3-29\cdot L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-4z=1 & (1) \\ 4x \quad -2z=7 & (2) \\ x \quad =2 & (3) \end{cases}$$

On remplace x par 2 dans (2) : $z=\frac{1}{2}$

On remplace x par 2 et z par $\frac{1}{2}$ dans (1) : $y=-3$

$\boxed{S=\left\{\left(2;-3;\frac{1}{2}\right)\right\}}$

Question 2 **(14 points)**

Soit x le nombre de chaussures modèle *high speed* et y le nombre de chaussures modèle *dynamico.*

On obtient le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} 4x+5y\leq 175 \\ 6x+20y\leq 600 \\ 22x+15y\leq 825 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y\leq 175 \\ 3x+10y\leq 300 \\ 22x+15y\leq 825 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

- Posons :

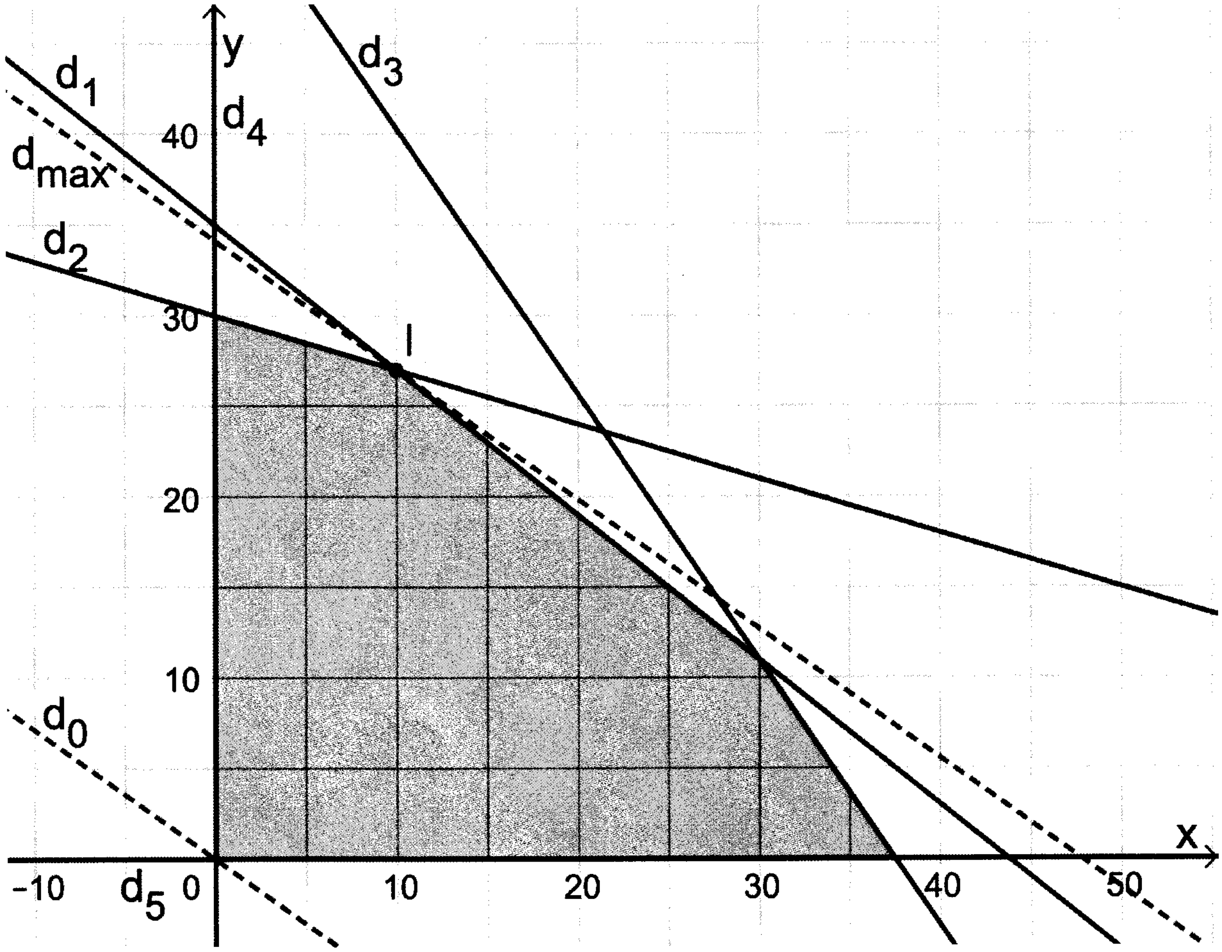
$d_1 \equiv 4x+5y=175 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{5}x+35.$
$4\cdot 0+5\cdot 0=0\ (<175)$, donc O appartient au demi-plan d'inéquation $4x+5y\leq 175$.

$d_2 \equiv 3x+10y=300 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{10}x+30.$
$3\cdot 0+10\cdot 0=0\ (<300)$, donc O appartient au demi-plan d'inéquation $3x+10y\leq 300$.

$d_3 \equiv 22x+15y\leq 825 \Leftrightarrow y=-\frac{22}{15}x+55.$
$22\cdot 0+15\cdot 0=0\ (<825)$, donc O appartient au demi-plan d'inéquation $22x+15y\leq 825$.

$d_4 \equiv x=0$ et $d_5 \equiv y=0$.
Il faut considérer l'ensemble de points qui ont des abscisses et des ordonnées positives.

- Le recette est donnée par $R(x,y)=100x+140y$. Posons $d_0 \equiv 100x+140y=0 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{7}x$.



- d_{max} passe par $I \in d_1 \cap d_2$: $\begin{cases} y = -\frac{4}{5}x + 35 \\ y = -\frac{3}{10}x + 30 \end{cases}$

$$-\frac{4}{5}x + 35 = -\frac{3}{10}x + 30 \quad \Leftrightarrow -\frac{8}{10}x + \frac{3}{10}x = -5$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{10}x = -5$$
$$\Leftrightarrow x = 10$$

On remplace x par 10 dans (1) : $y = 27$.
Donc $I(10; 27)$.

- La recette est maximale pour la vente de 10 paires de chaussures modèle *high speed* et 27 paires de chaussures modèle *dynamico*. Dans ce cas la recette est $R(10; 27) = 100 \cdot 10 + 140 \cdot 27 = 4\,780$ euros.

Question 3 **(3+2=5 points)**

1) $3\log_5(11 - 2x) + 1 = 9 - \log_5(11 - 2x)$ C.E. : $11 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{11}{2}$

$\forall x \in \left]-\infty; \frac{11}{2}\right[$: $3\log_5(11 - 2x) + 1 = 9 - \log_5(11 - 2x)$

$$\Leftrightarrow 4\log_5(11 - 2x) = 8$$
$$\Leftrightarrow \log_5(11 - 2x) = 2$$
$$\Leftrightarrow 11 - 2x = 25$$
$$\Leftrightarrow x = -7$$

$\boxed{S = \{-7\}}$

2) $5 \cdot 7^{3x} - 90 = 8 + 3 \cdot 7^{3x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad 5 \cdot 7^{3x} - 90 = 8 + 3 \cdot 7^{3x}$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 7^{3x} = 98$$
$$\Leftrightarrow 7^{3x} = 49$$
$$\Leftrightarrow 7^{3x} = 7^2$$
$$\Leftrightarrow 3x = 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$\boxed{S = \left\{\frac{2}{3}\right\}}$

Question 4 (5+4+3+2+3+3=20 points)

$$f(x) = 20x^3 - 360x^2 + 1920x + 5000$$

1) $f'(x) = 60x^2 - 720x + 1920$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow 60x^2 - 720x + 1920 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$

$\Delta = 144 - 128 = 16$

$x_1 = \frac{12-4}{2} = 4\,;\, x_1 = \frac{12+4}{2} = 8$

x	$-\infty$		4		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$\mathcal{C}_f$		$\nearrow$	8 200	$\searrow$	7 560	$\nearrow$	

$f(4) = 20 \cdot 4^3 - 360 \cdot 4^2 + 1920 \cdot 4 + 5000 = 8\,200 \quad \rightarrow$ Maximum : $(4; 8200)$

$f(8) = 20 \cdot 8^3 - 360 \cdot 8^2 + 1920 \cdot 8 + 5000 = 7\,560 \quad \rightarrow$ Minimum : $(8; 7560)$

2) $f''(x) = 120x - 720$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow 120x - 720 = 0$

$\Leftrightarrow x = 6$

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	
$\mathcal{C}_f$		$\frown$	7 880	$\smile$	

$f(6) = 20 \cdot 6^3 - 360 \cdot 6^2 + 1920 \cdot 6 + 5000 = 7\,880 \quad \rightarrow$ Point d'inflexion : $(6; 7880)$

3) $f(3) = 20 \cdot 3^3 - 360 \cdot 3^2 + 1920 \cdot 3 + 5000 = 8060$

$f'(3) = 60 \cdot 3^2 - 720 \cdot 3 + 1920 = 300$

Pour l'instant $t \equiv y = 300x + p$.

$A(3; 8060) \in t \quad \Leftrightarrow 8060 = 300 \cdot 3 + p$

$\Leftrightarrow p = 7160$

Donc $t \equiv y = 300x + 7160$.

4) $\frac{f(6)-f(0)}{6} = \frac{7880-5000}{6} = \frac{2880}{6} = 480$

Le taux de variation moyen de naissances lors des six premières années est de 480 naissances par an.

5) $f'(11) = 60 \cdot 11^2 - 720 \cdot 11 + 1920 = 1260$

Au début de l'année 2026 le taux instantané de naissances est de 1260 naissances par an.

6) $f'(x) = 720 \quad \Leftrightarrow 60x^2 - 720x + 1920 = 720$

$\Leftrightarrow 60x^2 - 720x + 1200 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0$

$\Delta = 144 - 80 = 64$

$x_1 = \frac{12-8}{2} = 2 \,;\, x_1 = \frac{12+8}{2} = 10$

Le taux de naissances sera égal à 720 en 2017 et en 2025.

Question 5 **((2+2)+(2+2)=8 points)**

1) a) Soit A l'évènement « tirer 4 boules de la même couleur » :

$P(A) = P(\text{«}tirer\ 4\ boules\ bleues\text{»}) + P(\text{«}tirer\ 4\ boules\ vertes\text{»})$

$= \frac{C_7^4 + C_5^4}{C_{15}^4}$

$= \frac{35+5}{1365} = \frac{8}{273} \approx 0{,}029$

b) Soit B l'évènement « tirer au moins 1 boule jaune » et $\bar{B}$ l'évènement « ne tirer aucune boule jaune »:

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{12}^4}{C_{15}^4} = 1 - \frac{495}{1365} = 1 - \frac{33}{91} = \frac{58}{91} \approx 0{,}64$

2) On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de :

a) Soit C l'évènement « tirer dans l'ordre 1 boule verte, 1 boule jaune, 1 boule verte » :

$P(C) = \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{45} \approx 0{,}02$

b) Soit D l'évènement « tirer 2 boules bleues sachant que la $1^{ère}$ boule tirée est jaune » :

$P(D) = \frac{7}{15} \cdot \frac{7}{15} = \frac{49}{225} \approx 0{,}22$

Question 6 **(2+3+2=7 points)**

1) $4 \cdot A_{13}^5 = 4 \cdot 154\,440 = 617\,760$

On a $617\,760$ cas possibles.

2) $C_{12}^4 \cdot C_{18}^3 + C_{12}^3 \cdot C_{18}^4 + C_{12}^2 \cdot C_{18}^5 + C_{12}^1 \cdot C_{18}^6 + C_{12}^0 \cdot C_{18}^7$

$= 495 \cdot 816 + 220 \cdot 3060 + 66 \cdot 8568 + 12 \cdot 18564 + 1 \cdot 31824$

$= 1\,897\,200$

On a $1\,897\,200$ cas possibles.

3) $A_{26}^3 \cdot A_{10}^2 = 15\,600 \cdot 90 = 1\,404\,000$

On a $1\,404\,000$ cas possibles.