



BRANCHE	SECTIONS	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques	E, F, G	Durée de l'épreuve : 2 heures Date de l'épreuve : 8 juin 2018

Partie I : Systèmes d'équations et d'inéquations

Question 1 (8 points)

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 5x - y = 3 + 2z \\ \frac{3x - 2}{4} - \frac{2y - 1}{2} + \frac{z}{3} = 5 \\ 7(x - 3) - 3(y - x) = 4(z - 1) - 10 \end{cases}$$

Question 2 (12 points)

Un pâtissier amateur réalise deux types de gâteaux : des gâteaux d'anniversaire et des gâteaux de mariage.

Un gâteau d'anniversaire nécessite 500 grammes de sucre et 3 kilogrammes de chocolat. Il est vendu pour 12 €. Comme le gâteau d'anniversaire est très large, le pâtissier peut en stocker au maximum 6.

Un gâteau de mariage nécessite un kilogramme de sucre et 2 kilogrammes de chocolat. Il est vendu pour 18 €.

Le pâtissier dispose d'un maximum de 24 kg de chocolat et de 8 kg de sucre.

Quel est le nombre de gâteaux de chaque type à réaliser pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

Partie II : Analyse

Question 3 (4+3=7 points)

Résoudre les équations suivantes et donner l'ensemble des solutions

a) $1 - 5 \cdot 3^{2x+1} = 5 - 7 \cdot 3^{2x+1}$

b) $7 - 3 \log_5(6 - x) = -2$

Question 4 (4+3+2=9 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 24x + 5$

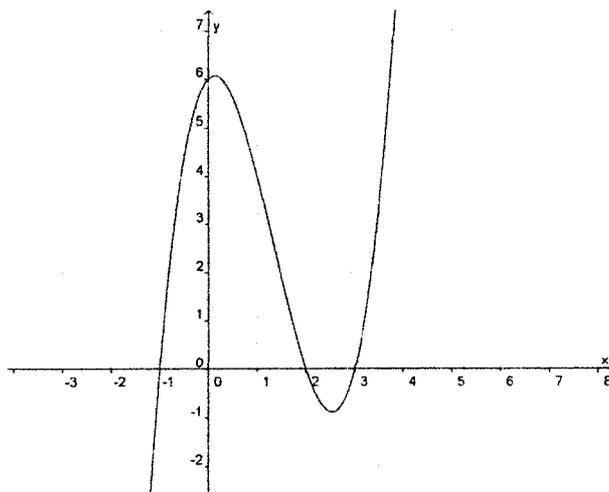
- Dresser le tableau de variation de f et préciser les extrema éventuels.
 - Dresser le tableau de concavité de f et préciser les points d'inflexion éventuels.
 - Déterminer l'équation de la tangente t_1 à la courbe de f au point d'abscisse 1.
-

Question 5 (3+4=7 points)

Soit f une fonction.

On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction dérivée f' .

- Dresser le tableau de variation de f .
- Tracer une courbe qui pourrait être celle de f (sur la farde).



Partie III : Probabilités et combinatoire

Question 6 (4+1+1+2=8 points)

Un réseau informatique d'une école contient 200 tablettes numériques dont

- 30 sont considérées comme neuves
- 90 sont considérées comme récentes
- les autres sont considérées comme anciennes.

Une étude statistique indique que

- 5% des tablettes neuves sont défectueuses
- 10% des tablettes récentes sont défectueuses
- 20% des tablettes anciennes sont défectueuses.

On choisit au hasard une tablette de cette école.

- Construire un diagramme en arbre montrant toutes les possibilités.
 - Déterminer la probabilité d'obtenir une tablette ancienne.
 - Calculer la probabilité d'obtenir une tablette neuve et défectueuse.
 - Calculer la probabilité d'obtenir une tablette défectueuse.
-

Question 7 (2+(1+2+2)+2=9 points)

Dans une urne, il y a 1 jeton blanc, 2 jetons noirs, 3 jetons rouges, 4 jetons jaunes et 5 jetons verts.

- a) En tirant simultanément 5 jetons de l'urne, quelle est la probabilité d'obtenir un jeton de chaque couleur ?
 - b) On tire successivement 3 jetons de l'urne en remettant à chaque fois le jeton tiré dans l'urne avant de tirer le suivant. Quelle est la probabilité de tirer
 - 1) 3 jetons verts ?
 - 2) 1 jaune puis 2 rouges ?
 - 3) 3 jetons de même couleur ?
 - c) On tire successivement 3 jetons de l'urne sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 jeton rouge ?
-

Corrigé modèle

Question 1 (8 points)

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - y = 3 + 2z \\ \frac{3x - 2}{4} - \frac{2y - 1}{2} + \frac{z}{3} = 5 \\ 7(x - 3) - 3(y - x) = 4(z - 1) - 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x - y - 2z = 3 \quad (1) \\ 9x - 12y + 4z = 60 \quad (2) \\ 10x - 3y - 4z = 7 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$(1): y = 5x - 2z - 3 \quad (1')$$

$$(1') \text{ dans } (2): -51x + 28z = 24 \quad (2')$$

$$(1') \text{ dans } (3): -5x + 2z = -2 \Leftrightarrow z = -1 + \frac{5}{2}x \quad (3')$$

$$(3') \text{ dans } (2'): x = \frac{52}{19} \quad (4)$$

$$(4) \text{ dans } (3'): z = \frac{111}{19} \quad (5)$$

$$(4), (5) \text{ dans } (1'): y = -1$$

$$S = \left\{ \left(\frac{52}{19}; -1; \frac{111}{19} \right) \right\}$$

Question 2 (12 points)

Soit x le nombre de gâteaux de type anniversaire et y le nombre de gâteaux de type mariage.

$$\text{Systèmes d'inéquations: } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 6 \\ y \geq 0 \\ \frac{1}{2}x + y \leq 8 \\ 3x + 2y \leq 24 \end{array} \right.$$

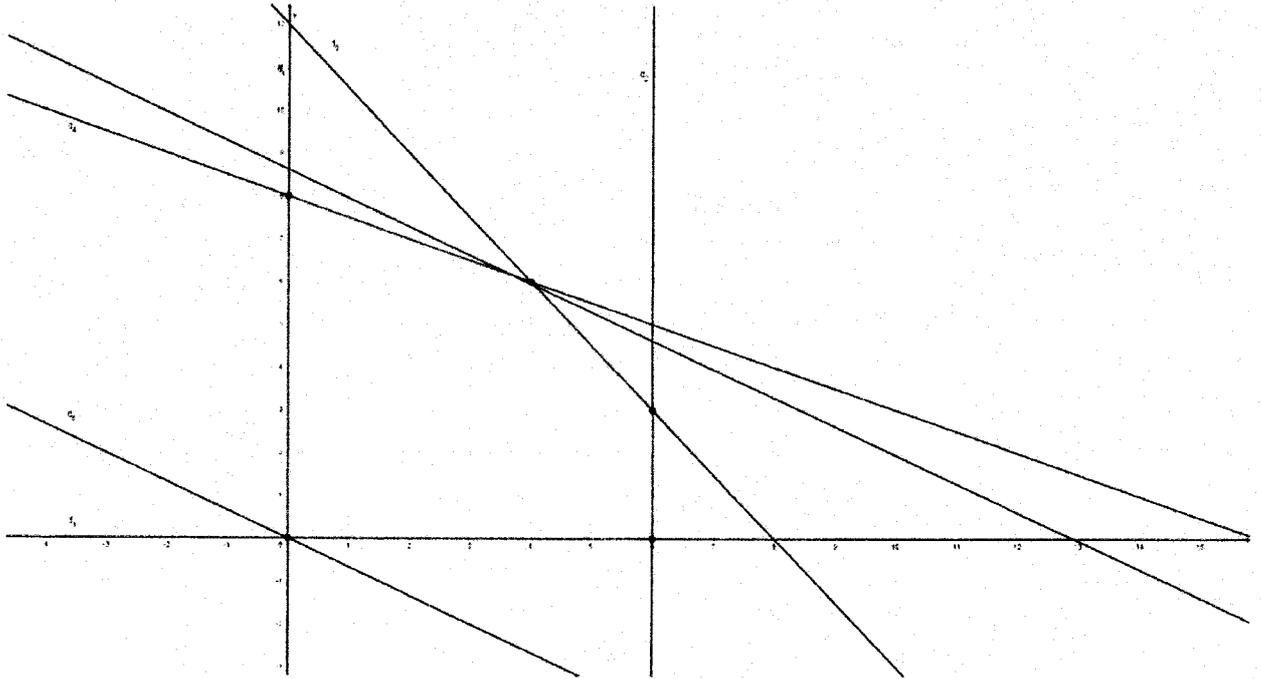
On trace les droites suivantes dans un repère :

$$d_1 \equiv x = 0 \quad d_2 \equiv x = 6 \quad d_3 \equiv y = 0 \quad d_4 \equiv \frac{1}{2}x + y = 8 \Leftrightarrow d_4 \equiv y = -\frac{1}{2}x + 8$$

$$d_5 \equiv 3x + 2y = 24 \Leftrightarrow d_5 \equiv y = -\frac{3}{2}x + 12$$

Test pour $A(1; 1)$:

$$0 \leq 1 \text{ vrai} \quad 1 \leq 6 \text{ vrai} \quad \frac{1}{2} + 1 \leq 8 \text{ vrai} \quad 3 + 2 \leq 24 \text{ vrai}$$



Bénéfice: $B(x; y) = 12x + 18y$

Droite de départ: $d_0 \equiv 12x + 18y = 0 \Leftrightarrow d_0 \equiv y = -\frac{2}{3}x$

Sur le graphique, on voit que le bénéfice est maximal pour $C(4; 6)$.

Vérification par calcul :
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 8 & (1') \\ y = -\frac{3}{2}x + 12 & (2') \end{cases}$$

(1') dans (2') : $-\frac{1}{2}x + 8 = -\frac{3}{2}x + 12 \Leftrightarrow x = 4$

Dans (2') : $y = -\frac{3}{2} \cdot 4 + 12 = 6$

Le bénéfice est donc maximal si le pâtissier réalise 4 gâteaux d'anniversaire et 6 gâteaux de mariage.

$$12 \cdot 4 + 18 \cdot 6 = 48 + 108 = 156$$

Le bénéfice maximal s'élève à 156€.

Question 3 (4+3=7 points)

a) $1 - 5 \cdot 3^{2x+1} = 5 - 7 \cdot 3^{2x+1}$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^{\log_3 2}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(\log_3 2 - 1)$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}(\log_3 2 - 1) \right\}$$

b) $7 - 3 \log_5(6 - x) = -2$

$$\Leftrightarrow -3 \log_5(6 - x) = -9$$

$$\Leftrightarrow \log_5(6 - x) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_5(6 - x) = \log_5 5^3$$

$$\Leftrightarrow 6 - x = 125$$

$$\Leftrightarrow x = -119$$

$$S = \{-119\}$$

Question 4 (4+3+2=9 points)

a) $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 24x + 5$

$$f'(x) = -4x^2 - 4x + 24$$

Racines de f' $\Delta = 16 + 384 = 400$ $x_1 = \frac{4+20}{-8} = -3$ $x_2 = \frac{4-20}{-8} = 2$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	$\frac{-49}{min}$	\nearrow	$\frac{max}{\frac{103}{3}}$	\nearrow	

b) $f''(x) = -8x - 4$

Racine de f'' $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Tableau de concavité

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$
C_f		\cup	$\frac{22}{3}$ P.I.	\cap

c) $t_1 \equiv y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

avec $f(1) = \frac{77}{3}$ et $f'(1) = 16$

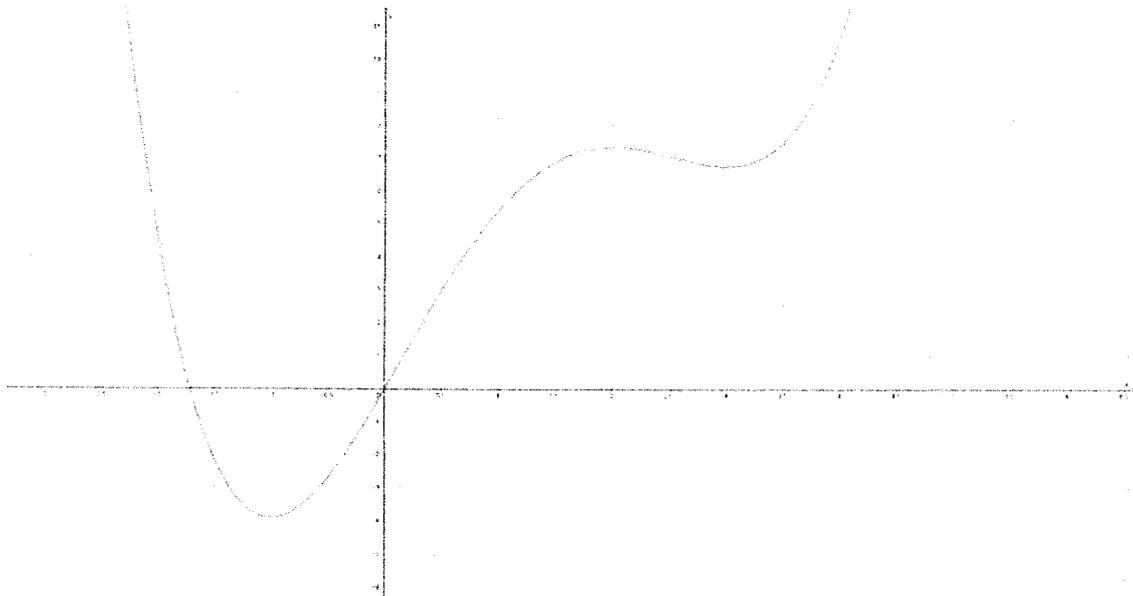
Donc $t_1 \equiv y = 16x + \frac{29}{3}$

Question 5 (3+4=7 points)

a) Tableau de variation

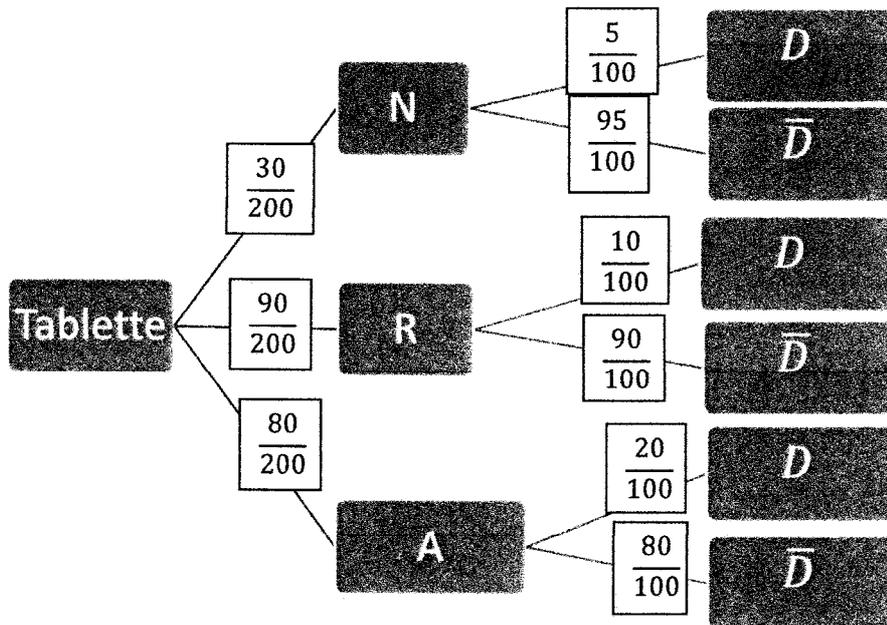
x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow			
		\min		\max		\min		

b) Représentation graphique



Question 6 (4+1+1+2=8 points)

a)



$$\text{b) } p(\text{tablette ancienne}) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$$

$$\text{c) } p(\text{tablette neuve et défailante}) = \frac{30}{200} \cdot \frac{5}{100} = \frac{3}{400}$$

$$\text{d) } p(\text{tablette défailante}) = \frac{30}{200} \cdot \frac{5}{100} + \frac{90}{200} \cdot \frac{10}{100} + \frac{80}{200} \cdot \frac{20}{100} = \frac{53}{400}$$

Question 7 (2+(1+2+2)+2=9 points)

$$\text{a) } p(1 \text{ jeton de chaque couleur}) = \frac{C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1}{C_{15}^5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3003} = \frac{40}{1001}$$

$$\text{b) 1) } p(VVV) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{15 \cdot 15 \cdot 15} = \frac{1}{27}$$

$$\text{2) } p(JRR) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{15 \cdot 15 \cdot 15} = \frac{4}{375}$$

$$\text{3) } p(BBB, NNN, RRR, JJJ, VVV) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 5}{15 \cdot 15 \cdot 15} = \frac{224}{3375}$$

$$\text{c) } p(\text{au moins 1 rouge}) = 1 - p(\text{aucun rouge}) = 1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{15 \cdot 14 \cdot 13} = 1 - \frac{44}{91} = \frac{47}{91}$$
