Corrigé EFG_MATHE1_QE1

Question 1 (7 points)

$$\begin{cases} 3x+2y-4z=5 & (1) \\ 2x-y+3z=1 & (2) \\ 5x+8y-18z=13 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{lr} 2\cdot(1)\ : & 6x+4y-8z=10 \\ -3\cdot(2) & -6x+3y-9z=-3 \\ \hline (2')\!: & 7y-17z=7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} 5\cdot(1): & 15x+10y-20z=25 \\ -3\cdot(3): & -15x-24y+54z=-39 \\ \hline & -14y+34z=-14 \\ (3') \Leftrightarrow & 7y-17z=7 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-4z=5 & (1) \\ 7y-17z=7 & (2') \\ 7y-17z=7 & (3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-4z=5 & (1) \\ 7y-17z=7 & (2') \\ 0z=0 & (3''):\ (2')-(3') \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé.

Posons $z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$

Dans (2') : $7y=7+17\alpha \Leftrightarrow y=1+\dfrac{17}{7}\alpha$

Dans (1) : $3x=-2\left(1+\dfrac{17}{7}\alpha\right)+4\alpha+5 \Leftrightarrow x=1-\dfrac{2}{7}\alpha$

$$S_{\mathbb{R}^3}=\left\{\left(1-\frac{2}{7}\alpha;\,1+\frac{17}{7}\alpha;\,\alpha\right)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{19}{17}-\frac{2}{17}\alpha\ ;\ \alpha\ ;\ -\frac{7}{17}+\frac{7}{17}\alpha\right)/\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\left(\alpha\ ;\ \frac{19}{2}-\frac{17}{2}\alpha\ ;\ \frac{7}{2}-\frac{7}{2}\alpha\right)/\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

Question 2 (13 points)

Soit x le nombre de sacs traditionnels et soit y celui de sacs de sport.
On obtient le système des contraintes :

$$\begin{cases} 12x+25y \leq 75\cdot 60 \\ 4x+2{,}5y \leq 800 \\ x \in \mathbb{N} \quad (x \geq 0) \\ y \in \mathbb{N} \quad (y \geq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+25y-4500 \leq 0 \\ 8x+5y-1600 \leq 0 \\ x \in \mathbb{N} \quad (x \geq 0) \\ y \in \mathbb{N} \quad (y \geq 0) \end{cases}$$

Soit $d_1 \equiv 12x+25y-4500=0 \Leftrightarrow y=-\frac{12}{25}x+180$

x	0	250
y	180	60

Point-test : $O(0\,;\,0)$: $12\cdot 0+25\cdot 0-4500=-4500 \leq 0$,
donc O appartient au demi-plan d'inéquation $12x+25y-4500 \leq 0$ (demi-plan-solution)

Soit $d_2 \equiv 8x+5y-1600=0 \Leftrightarrow y=-\frac{8}{5}x+320$

x	0	200
y	320	0

Point-test : $O(0\,;0)$: $8\cdot 0+5\cdot 0-1600=-1600 \leq 0$,
donc O appartient au demi-plan d'inéquation $8x+5y-1600 \leq 0$ (demi-plan-solution).

Soit $d_3 \equiv x=0$ et soit $d_4 \equiv y=0$.
Il faut considérer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont positives.

Le bénéfice est donné par : $B(x;y)=12x+9y$.

Soit $\Delta_0 \equiv 12x+9y=0 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x$

x	0	30
y	0	–40

$\Delta_{\max}$ passe par le point I , point d'intersection de d_1 avec d_2 .

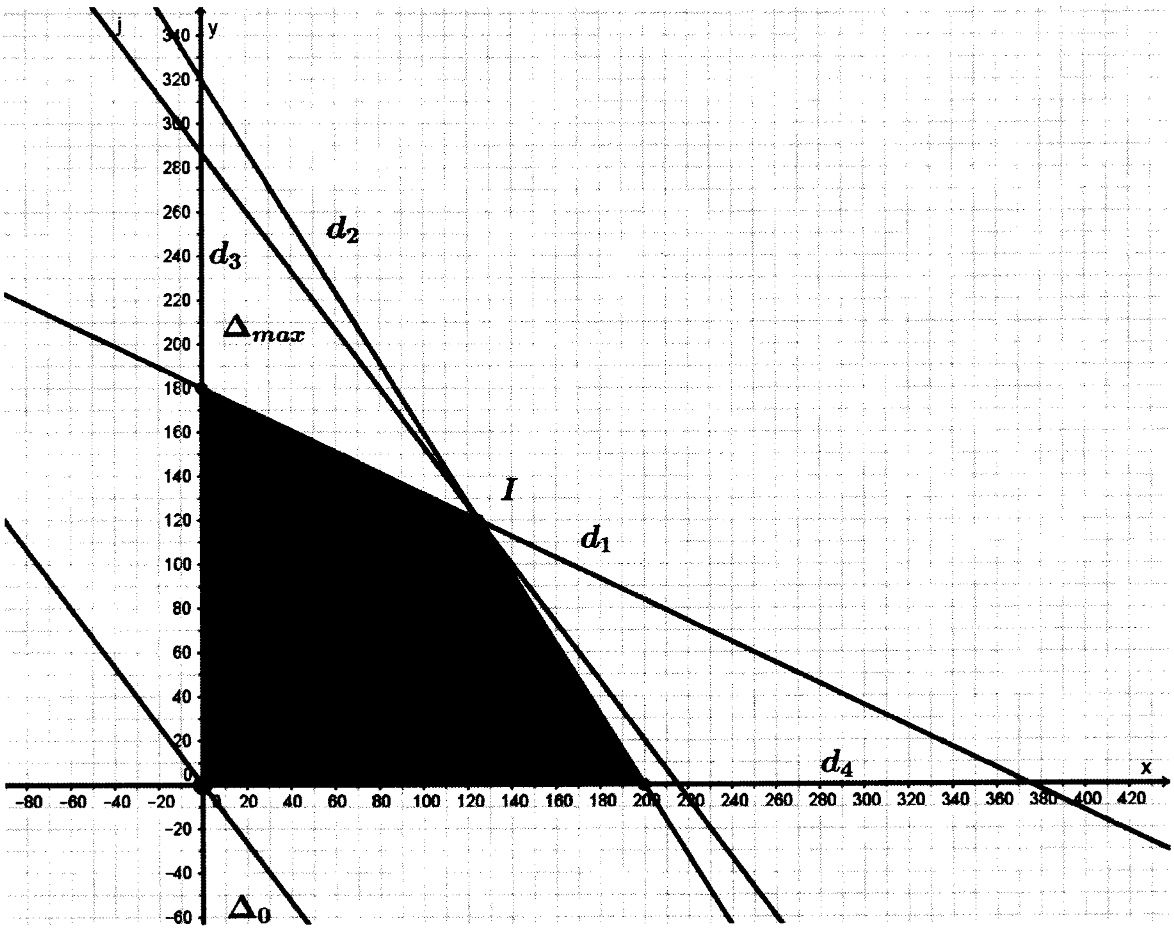
$$I(x;y) \in d_1 \cap d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{12}{25}x+180 & (1) \\ y=-\frac{8}{5}x+320 & (2) \end{cases}$$

(1) dans (2) : $-\frac{12}{25}x+180=-\frac{8}{5}x+320 \Leftrightarrow 28x=3500 \Leftrightarrow x=125$ -

Dans (2) : $y=-\frac{8}{5}\cdot 125+320 \Leftrightarrow y=120$.

D'où : $I(125\,;\,120)$

Le bénéfice est maximal pour la vente de 125 sacs traditionnels et 120 sacs de sport.
Il vaut : $B(125;120)=12\cdot 125+9\cdot 120=2580$ € .



Question 3 (5 points)

$f(x) = 3x^2 - 2x$

<u>1^{re} méthode : par la formule de dérivation</u> :

$f'(x) = 6x - 2$

$f'(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 12 - 2 = 10$

<u>2^e méthode : par la définition</u> :

$f(2+h) = 3 \cdot (2+h)^2 - 2 \cdot (2+h) = 3 \cdot (4 + 4h + h^2) - 4 - 2h = 3h^2 + 10h + 8$

$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$

$f(2+h) - f(2) = 3h^2 + 10h$

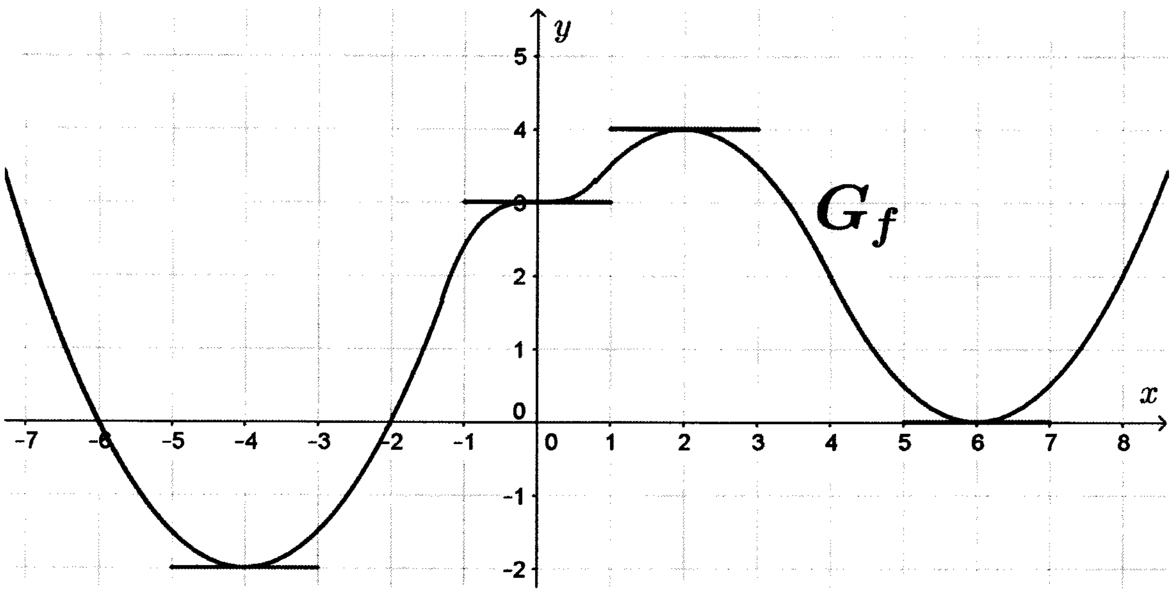
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{3h^2 + 10h}{h} = \frac{h(3h+10)}{h} = 3h + 10$$

$f'(2) = 3 \cdot 0 + 10 = 10$

Question 4 (8 points)

x		-4		0		2		6	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	□	-2 min	□	3 *PI* à tangente horizontale	□	**4** *Max*	□	**0** min	□

x		$-1{,}5$		0		1		4	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\cup$	$1{,}5$ *P.I.*	$\cap$	3 *P.I.*	$\cup$	$3{,}5$ *P.I.*	$\cap$	2 *P.I.*	$\cup$



Question 5 (9 points)

(a) $C(t) = 5000 \cdot (1{,}0115)^t$

(b) $C(t) = 1{,}3 \cdot C(0)$

$$\Leftrightarrow 5000 \cdot (1{,}0115)^t = 1{,}3 \cdot 5000 \qquad |: 5000$$

$$\Leftrightarrow 1{,}0115^t = 1{,}3$$

$$\Leftrightarrow \log(1{,}0115)^t = \log 1{,}3$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \log(1{,}0115) = \log 1{,}3$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\log 1{,}3}{\log 1{,}0115}$$

$$t \approx 22{,}95$$

Après 23 ans, le capital aura augmenté de 30 %.

(c) $C_1(t) = 5000 \cdot 1{,}0115^t$

$C_2(t) = 6000 \cdot 1{,}0102^t$

$$C_1(t) = C_2(t) \Leftrightarrow 5000 \cdot 1{,}0115^t = 6000 \cdot 1{,}0102^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1{,}0115^t}{1{,}0102^t} = \frac{6000}{5000}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1{,}0115}{1{,}0102}\right)^t = \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{1{,}0115}{1{,}0102}\right)^t = \log\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \log\left(\frac{1{,}0115}{1{,}0102}\right) = \log\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\log\frac{6}{5}}{\log\left(\frac{1{,}0115}{1{,}0102}\right)}$$

$$t \approx 141{,}77$$

Après 142 ans, les deux capitaux auront acquis la même valeur.

Exercice 6 (8 points)

(a)

	VTT	COURSE	CITYBIKE	TOTAUX
HOMME	$720-330=390$	850	$120:2=60$	$1800-500=1300$
FEMME	$500-50-120$ $=330$	$900-850=50$	$0{,}24\cdot 500=120$	500
TOTAUX	$0{,}4\cdot 1800=720$	$1800-720-180=900$	$60+120=180$	1800

(b) $P(H \text{ et } VTT)=\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\dfrac{390}{1800}=\dfrac{13}{60}\approx 0{,}217 \quad (21{,}7\%)$

(c) $P(\text{Vélo de course sachant que F})=\dfrac{P(\text{vélo de course et F})}{P(\text{F})}=\dfrac{50}{500}=\dfrac{1}{10}=0{,}1 \quad (10\%)$

Exercice 7 (5+5=10 points)

A. Tirage sans ordre de 4 boules parmi $8+5+2=15$ boules.

(1) Nombre de tirages possibles : $C_{15}^4=\dfrac{15!}{4!\cdot 11!}=1365$

(2) (a) Evénement A : on tire 2 boules blanches parmi 8 et 2 boules noires parmi 2.

Nombre de cas favorables : $C_8^2\cdot C_2^2=28$

$$P(A)=\frac{28}{1365}=\frac{4}{195}\approx 0{,}021 \quad (2{,}1\%)$$

(b) Evénement B : on tire 4 boules de la même couleur, donc 4 boules blanches parmi 8 ou 4 boules vertes parmi 5 – il n'y a que 2 boules noires...

Nombre de cas favorables : $C_8^4+C_5^4=70+5=75$

$$P(B)=\frac{75}{1365}=\frac{5}{91}\approx 0{,}055 \quad (5{,}5\%)$$

B. Tirage avec ordre et avec remise de 4 boules parmi 15 boules.

(1) Nombre de tirages possibles : $B_{15}^4=15^4=50625$

(2) (a) Evénement A : on tire 2 boules blanches parmi 8 suivies de 2 boules noires parmi 2.

Nombre de cas favorables : $B_8^2\cdot B_2^2=256$

$$P(A)=\frac{256}{50625}\approx 0{,}0051 \quad (0{,}51\%)$$

(b) Evénement B : on tire 4 boules blanches parmi 8 ou 4 boules noires parmi 2 (car avec remise) ou 4 boules vertes parmi 5.

Nombre de cas favorables : $B_8^4+B_2^4+B_5^4=8^4+2^4+5^4=4737$

$$P(B)=\frac{4737}{50625}=\frac{1579}{16875}\approx 0{,}094 \quad (9{,}4\%)$$