

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024

CORRIGÉ

Date :	05.06.24	Horaire :	08:15 - 10:15	Durée :	120 minutes
Discipline :	MATHE	Type :	écrit	Section(s) :	CA-MALA / CA-MALF / CA-MATT / CE / CE-4LANG / CF / CG / CG-4LANG / CG-COMED / CG-SPO / CG-URBS
Numéro du candidat :					

Partie I : Systèmes d'équations et d'inéquations (20 points)

Question 1 (7 points)

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{6} + 4 = \frac{z}{12} \\ 2x - \frac{1}{2}z = y - 24 \\ 7y - (x + 2y + 3) = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+1) - 2(y+2) + 48 = z \\ 2x - y - \frac{1}{2}z = -24 \\ 7y - x - 2y - 3 = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y - z = -48 & (1) \\ 2x - y - \frac{1}{2}z = -24 & (2) \\ -x + 5y - 5z = 3 & (3) \end{cases}$$

$$(3) : x = 5y - 5z - 3 \quad (3)'$$

$$(3') \text{ dans } (1) : 4(5y - 5z - 3) - 2y - z = -48 \Leftrightarrow 18y - 21z = -36$$

$$(3') \text{ dans } (2) :$$

$$2(5y - 5z - 3) - y - \frac{1}{2}z = -24 \Leftrightarrow 9y - \frac{21}{2}z = -18 \Leftrightarrow 18y - 21z = -36 \quad (2')$$

Système simplement indéterminé : posons $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{Dans } (2') : 18y = 21\alpha - 36 \Leftrightarrow y = \frac{7}{6}\alpha - 2$$

$$\text{Dans } (3') : x = 5\left(\frac{7}{6}\alpha - 2\right) - 5\alpha - 3 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}\alpha - 13$$

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{6}\alpha - 13; \frac{7}{6}\alpha - 2; \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(S = \left\{ \left(\frac{5}{7}\beta - \frac{81}{7}; \beta; \frac{6}{7}\beta + \frac{12}{7} \right) \mid \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\gamma; \frac{7}{5}\gamma + \frac{81}{5}; \frac{6}{5}\gamma + \frac{78}{5} \right) \mid \gamma \in \mathbb{R} \right\} \right)$$

Question 2 (13 points)

Soient x le nombre de smoothies « *sunlight* » et y le nombre de smoothies « *energy* ».

$$\begin{cases} 2x + y \leq 800 \\ 4x + 2y \leq 700 \\ y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

On trace les droites suivantes dans un repère : $d_1 \equiv 2x + y = 800 \Leftrightarrow d_1 \equiv y = -2x + 800$

$$d_2 \equiv 4x + 2y = 700 \Leftrightarrow d_2 \equiv y = -2x + 350$$

$$d_3 \equiv y = 300$$

$$d_4 \equiv x = 0$$

$$d_5 \equiv y = 0$$

Prenons le point-test $P(1; 1)$: $3 \leq 800$ vrai donc P appartient au demi-plan $2x + y \leq 800$

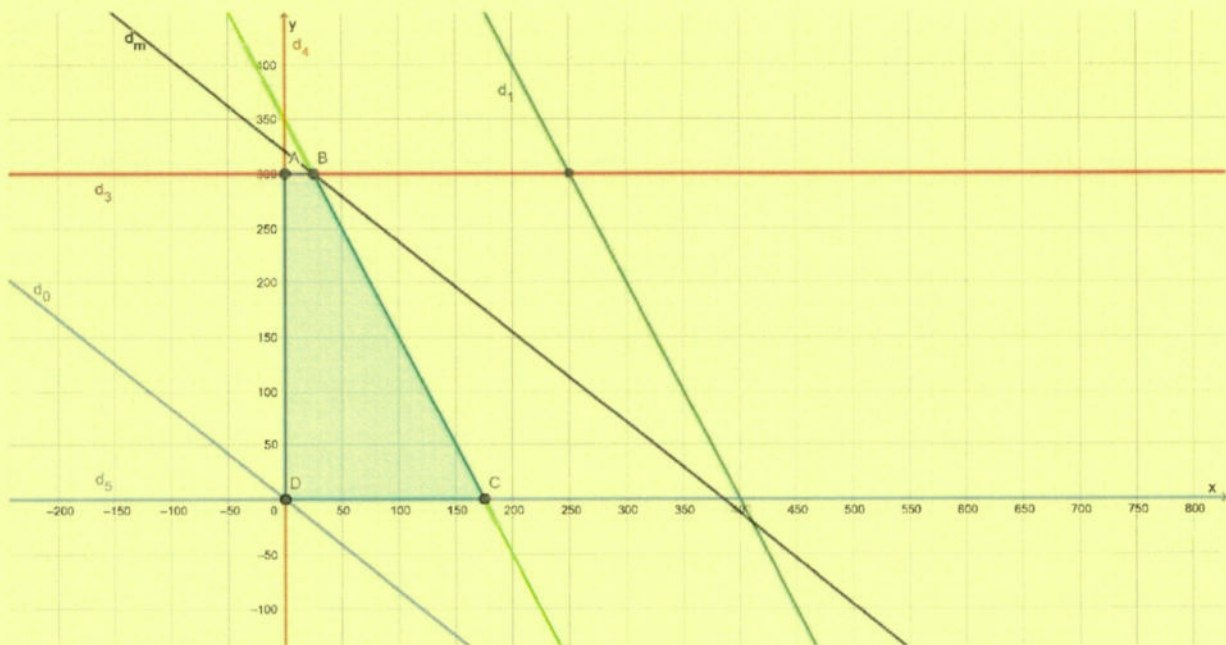
$6 \leq 700$ vrai donc P appartient au demi-plan $4x + 2y \leq 700$

$1 \leq 300$ vrai donc P appartient au demi-plan $y \leq 300$

$1 \geq 0$ vrai donc P appartient au demi-plan $x \geq 0$

$1 \geq 0$ vrai donc P appartient au demi-plan $y \geq 0$

Polygone des contraintes (tous les bords sont inclus) :



Recette : $R(x; y) = 5x + 6y$

Droite de départ : $d_0 \equiv 5x + 6y = 0 \Leftrightarrow d_0 \equiv y = -\frac{5}{6}x$.

La droite d_m parallèle à d_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est le plus éloignée de l'origine, passe par le sommet B . Donc, on voit que la recette est maximale en $B(25; 300)$.

Sous les contraintes données, la recette maximale est obtenue pour la vente de 25 smoothies « *sunlight* » et 300 smoothies « *energy* ».

$$R(25; 300) = 25 \cdot 5 + 300 \cdot 6 = 1925$$

La recette maximale s'élève à 1925€.

Partie II : Analyse (25 points)**Question 3 (4+3+2= 9 points)**

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 4$$

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x - 6$

Racines : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$ [$\Delta = 324$]

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		$\nearrow$	$\frac{23}{4}$ max	$\searrow$	$\nearrow$
				-1 min	

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{23}{4} \qquad f(1) = 4 - 3 - 6 + 4 = -1$$

b) $f''(x) = 24x - 6$

Racine : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Tableau de concavité :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	$\cap$	P.I. $\frac{19}{8}$	$\cup$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 4 = \frac{19}{8}$$

c) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} - 6 = -6 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 + 4 = \frac{3}{4}$

Donc $t \equiv y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t \equiv y = -6\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$
 $\Leftrightarrow t \equiv y = -6x + \frac{15}{4}$

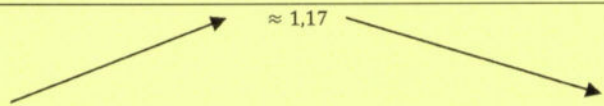
Question 4 (6 points)Tableau de variation de f (d'après C_f) :

x		-3		3	
$f'(x)$		-	0	+	0
					-
f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			$\approx -0,38$ min	$\approx 4,37$ max	

Comme $f'(-3) = f'(3) = 0$: $C_{f'}$ coupe (Ox) en $(-3; 0)$ et en $(3; 0) \rightarrow C_3$ ou C_6 .

Comme $f'(x) \geq 0$ sur $[-3; 3]$: $C_{f'} = C_3$.

Tableau de variation de f' (d'après C_3) :

x	0		
$f''(x)$	+	0	-
f'			

Comme $f''(0) = 0$: $C_{f''}$ coupe (Ox) en $(0; 0) \rightarrow C_1$ ou C_5 .

Comme $f'(x) \geq 0$ pour $x \leq 0$: $C_{f''} = C_5$.

Question 5 (3+3+(2+2) = 10 points)

a) $3 \cdot 5^{-2x+1} + 4 = -8 + 7 \cdot 5^{-2x+1} \Leftrightarrow -4 \cdot 5^{-2x+1} = -12$

$$\Leftrightarrow 5^{-2x+1} = 3$$

$$\Leftrightarrow 5^{-2x+1} = 5^{\log_5(3)}$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = \log_5(3)$$

$$\Leftrightarrow -2x = -1 + \log_5(3)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_5(3)$$

$$S = \left\{ \frac{1 - \log_5(3)}{2} \right\}$$

b) $2 \log_4(3 - x) + 2 = \log_4(3 - x) \Leftrightarrow \log_4(3 - x) = -2$

$$\Leftrightarrow \log_4(3 - x) = \log_4 4^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 3 - x = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{47}{16}$$

$$S = \left\{ \frac{47}{16} \right\}$$

c) $\log(a) = -4$ et $\log(b) = 5$

1) $\log(ab^3) = \log(a) + \log(b^3) = \log(a) + 3 \log(b) = -4 + 3 \cdot 5 = 11$

2) $\log\left(\sqrt{\frac{a^2}{b}}\right) = \log\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[\log(a^2) - \log(b)] = \frac{1}{2}[2 \cdot (-4) - 5] = -\frac{13}{2}$

Partie III : Probabilités et combinatoire (15 points)**Question 6 (2+3+2= 7 points)**

Nombre de cas possibles $C_{52}^4 = 270\,725$

$$\text{a) } p(\text{uniquement carreaux}) = \frac{C_{13}^4}{C_{52}^4} = \frac{715}{270\,725} = \frac{11}{4\,165}$$

b) 2 cas à envisager:

- On tire la carte valet pique et 3 cartes non valet non pique : $C_1^1 \cdot C_{36}^3$
- On tire un valet non pique, un pique non valet et 2 cartes non valet non pique :

$$C_3^1 \cdot C_{12}^1 \cdot C_{36}^2$$

$$p(\text{un valet et un pique}) = \frac{C_1^1 \cdot C_{36}^3 + C_3^1 \cdot C_{12}^1 \cdot C_{36}^2}{C_{52}^4} = \frac{7\,140 + 22\,680}{270\,725} = \frac{852}{7\,735}$$

$$\text{c) } p(\text{au moins un trèfle}) = 1 - p(\text{aucun trèfle}) = 1 - \frac{C_{39}^4}{C_{52}^4} = 1 - \frac{6\,327}{20\,825} = \frac{14\,498}{20\,825}$$

Question 7 (4+(2+2)= 8 points)

a)

	Pas d'intolérances	Intolérant au gluten	Intolérant au lactose	Totaux
Garçons	110	30	35	175
Filles	100	40	35	175
Totaux	210	70	70	350

$$\text{b) } 1) p(\text{fille} | \text{intolérant au gluten}) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$$

$$2) p(\text{garçon sans intolérance au lactose}) = \frac{110+30}{350} = \frac{2}{5}$$