Corrigé

Question 1

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{z}{2}+2=0 \\ 3(z+2y+1)=3-2x \\ 6x+25=4y+5z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{z}{2}=-2 \\ 2x+6y+3z=0 \\ 6x-4y-5z=-25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+0{,}5z=-2 & (1) \\ 2x+6y+3z=0 & (2)\,|(2)-2\cdot(1)\rightarrow(2') \\ 6x-4y-5z=-25 & (3)\,|(3)-6\cdot(1)\rightarrow(3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+0{,}5z=-2 & (1) \\ 4y+2z=4 & (2') \\ -10y-8z=-13 & (3')\,|(3')+4\cdot(2')\rightarrow(3'') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+0{,}5z=-2 & (1) \\ 4y+2z=4 & (2') \\ 6y=3 & (3'') \end{cases}$$

$(3'') \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}$

$(2') \Leftrightarrow 4\cdot\dfrac{1}{2}+2z=4$

$\Leftrightarrow z=1$

$(1) \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=-2$

$\Leftrightarrow x=-3$

$S=\left\{\left(-3;\dfrac{1}{2};1\right)\right\}$

Question 2

1) $\underline{(AB)\equiv x=0}$

(Axe des ordonnées)

(BC) :

Calcul de la pente : $r=\frac{8-5}{0-6}=-\frac{1}{2}$

Calcul de l'ordonnée à l'origine :

$B(0\,;8)\in(BC)$

$\Leftrightarrow 8=-\dfrac{1}{2}\cdot 0+s \Leftrightarrow s=8$

Donc : $\underline{(BC)\equiv y=-\frac{1}{2}x+8}$

(CD) :

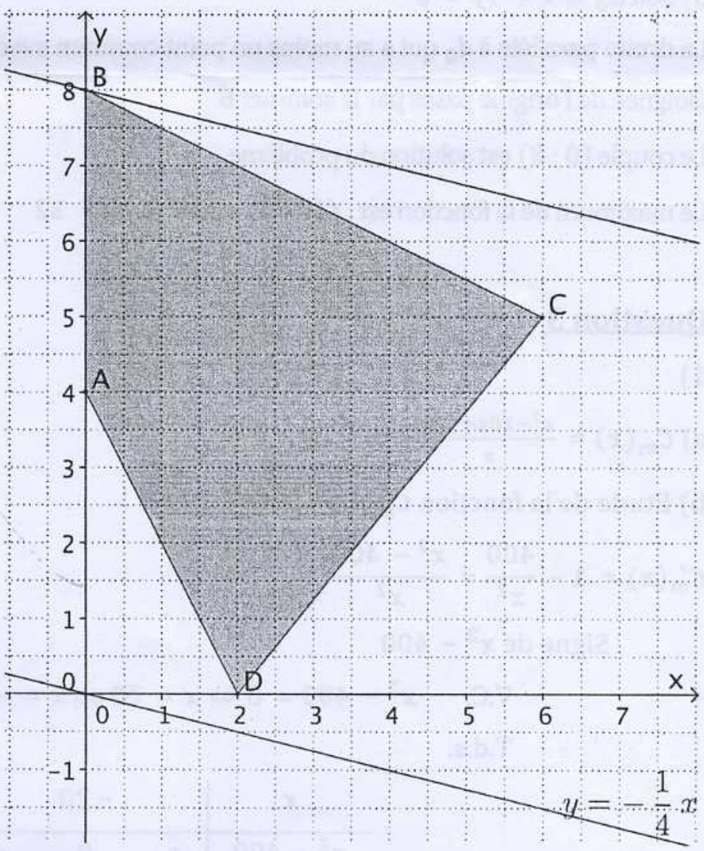
Calcul de la pente : $r=\frac{0-5}{2-6}=\frac{5}{4}$

Calcul de l'ordonnée à l'origine :

$C(6\,;5)\in(CD)$

$\Leftrightarrow 5=\dfrac{5}{4}\cdot 6+s \Leftrightarrow s=-\dfrac{5}{2}$

Donc : $\underline{(CD)\equiv y=\frac{5}{4}x-\frac{5}{2}}$



(AD) : Calcul de la pente : $r=\frac{4-0}{0-2}=-2$

Calcul de l'ordonnée à l'origine : $A(0\,;4)\in(AD)\Leftrightarrow 4=-2\cdot 0+s\Leftrightarrow s=4$

Donc : $\underline{(AD)\equiv y=-2x+4}$

2) $(AB) \equiv x = 0$

Le point de coordonnées $(2\,;1)$ appartient au demi-plan des solutions et $1 > 0$

L'inéquation $x \geq 0$ fait partie du système.

$(BC) \equiv y = -\frac{1}{2}x + 8$

Le point de coordonnées $(2\,;1)$ appartient au demi-plan des solutions et $1 < -\frac{1}{2}\cdot 2 + 8$

L'inéquation $y \leq -\frac{1}{2}x + 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y \leq 8$ fait partie du système.

$(CD) \equiv y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{2}$

Le point de coordonnées $(2\,;1)$ appartient au demi-plan des solutions et $1 > \frac{5}{4}\cdot 2 - \frac{5}{2}$

L'inéquation $y \geq \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x + y \geq -\frac{5}{2}$ fait partie du système.

$(AD) \equiv y = -2x + 4$

Le point de coordonnées $(2\,;1)$ appartient au demi-plan des solutions et $1 > -2\cdot 2 + 4$

L'inéquation $y \geq -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y \geq 4$ fait partie du système.

Le système d'inéquations correspondant au graphique s'écrit : $\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x + y \leq 8 \\ -\frac{5}{4}x + y \geq -\frac{5}{2} \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$

3) Soit $d_0 \equiv x + 4y = 0$

La droite parallèle à d_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus éloignée de l'origine passe par le sommet B

Le couple $(0\,;8)$ est solution du problème.

Le maximum de la fonction est : $f(0\,;8) = 0 + 4\cdot 8 = 32$

Question 3

1)

a) $C_m(x) = \frac{x^2-20x+400}{x} = x - 20 + \frac{400}{x}$

b) Etude de la fonction C_m :

$C'_m(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2} > 0$

Signe de $x^2 - 400$

V.C. $\quad x^2 - 400 = 0 \Leftrightarrow x = 20$ ou $x = -20$

T.d.s.

x		-20		20	
$x^2 - 400$	$+$	0	$-$	0	$+$

Tableau de variation

x	-20		0		20		500
$C'_m(x)$	$+$ 0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
C_m			$\|$	↘	min	↗	

Le coût unitaire moyen est minimal pour la fabrication de 20 objets.

Ce coût est de $C_m(20) = 20 - 20 + \frac{400}{20} = 20$ €.

2)

a) $B(x) = 100x - x^2 + 20x - 400 = -x^2 + 120x - 400$

b) Etude de la fonction B :

$B'(x) = -2x + 120$

$-2x + 120 = 0 \Leftrightarrow x = 60$

Tableau de variation

x		0		60		500
$B'(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
B		$\|$	↗	max	↘	

Le bénéfice maximal est atteint pour 60 objets. Ce bénéfice vaut $B(60) = 3200$ €.

Question 4

Tableau de variation de f à l'aide du signe de f' (d'après $C_{f'}$)

x	$-\infty$		$-3{,}3$		$0{,}3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	*min*	↗	*max*	↘	

D'après les variations de f, $C_f = C_4$

Tableau de signe de f'' à l'aide des variations de f' (d'après $C_{f'}$)

x	$-\infty$		$-1{,}5$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'		↗	*max*	↘	

D'après le signe de f'', $C_{f''} = C_1$

Question 5

$2 \cdot 4^{3x+1} - 995 = 285 - 3 \cdot 4^{3x+1}$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 4^{3x+1} = 1280$

$\Leftrightarrow 4^{3x+1} = 256$

$\Leftrightarrow 3x + 1 = \log_4 256 = 4$

$\Leftrightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

Question 6

6R, 5B, 4V Total : 15 boules

1) a) p(2 boules de même couleur)

$= p(RR) + p(BB) + p(VV)$

$= \frac{6}{15} \cdot \frac{6}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} = \frac{77}{225} \approx 0{,}34$

b) $p(VB) + p(BV) = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{15} = \frac{8}{45} \approx 0{,}18$

2) a) p(2 boules de couleurs différentes)

$= 1 - p(2 \text{ boules de même couleur})$

$= 1 - p(RR) - p(BB) - p(VV) = 1 - \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} - \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} - \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} = \frac{74}{105} \approx 0{,}7$

b) $p(BV) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21} \approx 0{,}095$

Question 7

1) $C_8^5 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

2) $C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_{24}^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{24!}{22! \cdot 2!} = 6 \cdot 4 \cdot 276 = 6624$

3) Nombre de mains avec la dame de cœur :

$\underbrace{\text{Dame } \heartsuit}$, $\underbrace{\text{3 autres dames}}$, $\underbrace{\text{7 autres cœurs}}$, $\underbrace{\text{21 autres}}$

$$C_1^1 \cdot C_{21}^4 = 1 \cdot \frac{21!}{17! \cdot 4!} = 5985$$

Nombre de mains sans la dame de cœur :

$$C_3^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{21}^3 = 3 \cdot 7 \cdot \frac{21!}{18! \cdot 3!} = 6 \cdot 4 \cdot 1330 = 27930$$

Donc il y a 5985 + 27930 = 32915 mains qui contiennent une dame et un cœur.

4) Le nombre de mains qui contiennent au moins un trèfle est égal au nombre de toutes les mains diminué du nombre de mains sans trèfle.

$\underbrace{\text{8 trèfles}}$, $\underbrace{\text{24 autres}}$

$C_{32}^5 - C_{24}^5 = \frac{32!}{27! \cdot 5!} - \frac{24!}{19! \cdot 5!} = 158872$