Corrigé

Question 1 (7 points)

$$\begin{cases} -x+y+z=3 \\ x+3y+z=5 \\ -2x+4y+3z=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3+x-y \\ x+3y+3+x-y=5 \\ -2x+4y+9+3x-3y=10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3+x-y \\ 2x+2y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3+x-y \\ x+y=1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Système simplement indéterminé

Posons $x=k$

$$\begin{cases} z=3+k-1+k \\ y=1-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2k+2 \\ y=1-k \end{cases}$$

$S=\{(k;1-k;2k+2)/k\in\mathbb{R}\}$

Interprétation géométrique

Les 3 équations du système représentent 3 plans qui se coupent suivant la droite d passant par $A(0,1,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Question 2 (8 points)

(a) (7)

$M(x,y,z)\in\pi$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}+l\cdot\overrightarrow{AC}$ *avec* $k,l\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=k\cdot 3+l\cdot 1 \\ y-1=k\cdot(-1)+l\cdot 0 \\ z-2=k\cdot(-1)+l\cdot(-1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3k+l \\ y-1=-k \\ z-2=-k-l \end{cases} \quad \text{système d'équations paramétriques de } \pi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-y+1 \\ x=-3y+3+l \\ z-2=y-1-l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -y+1 \\ l = x+3y-3 \\ z-2 = y-1-x-3y+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -y+1 \\ l = x+3y-3 \\ x+2y+z = 4 \end{cases}$$

Equation cartésienne de π : $x + 2y + z = 4$

(b) (1)

Si x=5 et z=-1, alors $5 + 2y - 1 = 4 \Leftrightarrow y = 0$

Question 3 (7 points)

$2\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq \ln(x-2)$

C.E.:

$3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$

$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Donc $x \in]2;3[= D$

$\forall x \in D$

$\quad \ln(3-x)^2 \leq \ln(x-2)(x+1)$

$\Leftrightarrow (3-x)^2 \leq (x-2)(x+1)$

$\Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 \leq x^2 - 2x + x - 2$

$\Leftrightarrow -5x \leq -11$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{11}{5}$

$S_1 = [\frac{11}{5}; +\infty[$

$S = S_1 \cap D = [\frac{11}{5}; 3[$

Question 4 (6 points)

$f(x) = \ln(\frac{4x-1}{5x+1})$

C.E.:

$\frac{4x-1}{5x+1} > 0 \quad et \quad 5x + 1 \neq 0$

$dom f =]-\infty, -\frac{1}{5}[\cup]\frac{1}{4}, +\infty[= dom f'$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\frac{4x-1}{5x+1}} \cdot \left(\frac{4x-1}{5x+1}\right)' \\
&= \frac{4x-1}{5x+1} \cdot \frac{4(5x+1)-5(4x-1)}{(5x+1)^2} \\
&= \frac{20x+4-20x+5}{(4x-1)(5x+1)} \\
&= \frac{9}{(4x-1)(5x+1)}
\end{aligned}
$$

Question 5 (12 points)

(a) (7)

$f(x) = 2 - e^{x+1}$

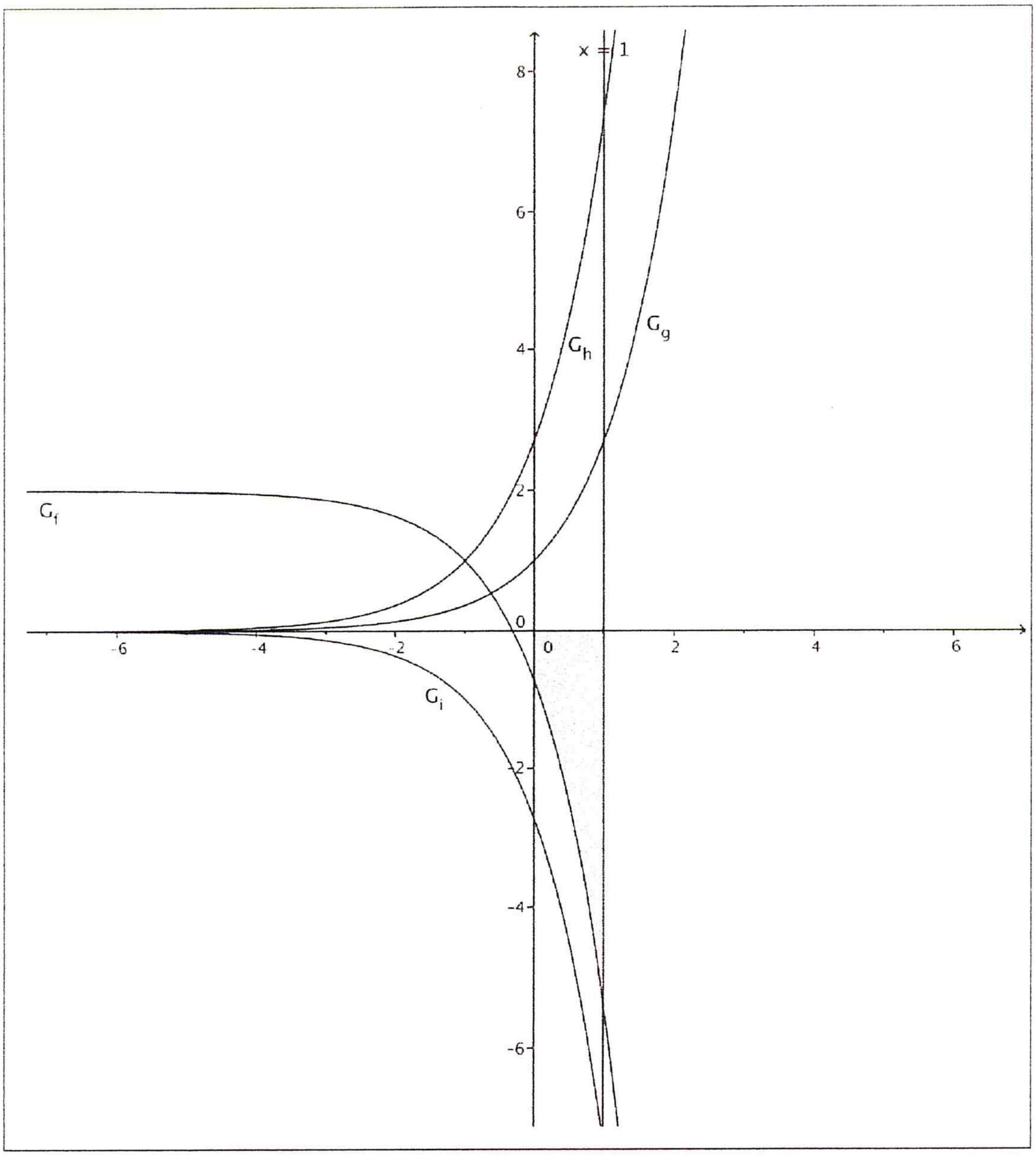
$dom f = \mathbb{R}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
e^x & \longrightarrow & e^{x+1} & \longrightarrow & -e^{x+1} & \longrightarrow & 2-e^{x+1} \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
g(x) & & h(x) & & i(x) & & f(x)
\end{array}
$$

$G_g \longrightarrow G_h$: transl. hor. d'1 unité vers la gauche

$G_h \longrightarrow G_i$: sym. orthogonale par rapport à (Ox)

$G_i \longrightarrow G_f$: transl. vert. de 2 unités vers le haut



(b) (5)

$$\begin{aligned} A = -\int_0^1 (2 - e^{x+1})dx &= -[2x - e^{x+1}]_0^1 \\ &= -[2 - e^2 + e] \\ &= -2 + e^2 - e \\ &\approx 2,67 \quad u.a. \end{aligned}$$

Question 6 (10 points)

(a) (5)

$$\int_2^3 \frac{4x-3}{4x^2-6x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{u'(x)}{u(x)}dx \qquad u(x) = 4x^2 - 6x + 2$$
$$= \frac{1}{2}[\ln|u(x)|]_2^3 \qquad u'(x) = 8x - 6$$
$$= \frac{1}{2}[\ln|4x^2 - 6x + 2|]_2^3$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 20 - \ln 6)$$

(b) (5)

I.p.p. :
$u(x) = 1 + x \qquad u'(x) = 1$
$v'(x) = e^x \qquad v(x) = e^x$

$$\int (1+x)e^x dx$$
$$= (1+x)e^x - \int e^x dx$$
$$= e^x + xe^x - e^x + k \quad (k \in \mathbb{R})$$
$$= xe^x + k$$

Question 7 (10 points)

(a) (2)

Nombre de tirages comportant 3 boules de couleurs différentes:
$C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_4^1 = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$

(b) (4)

Nombre de tirages comportant 2 boules de même couleur:
$C_7^2 \cdot C_{10}^1 + C_6^2 \cdot C_{11}^1 + C_4^2 \cdot C_{13}^1 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 10 + \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 11 + \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 13 = 453$

(c) (4)

Nombre de tirages comportant au moins 2 boules noires:
$C_6^2 \cdot C_{11}^1 + C_6^3 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 11 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 185$