Corrigé

Exercice I

1. a. $M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})\ \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + k \\ y = 3 - k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$ (système d'équations paramétriques de d)

Eliminons le paramètre k :

$$\begin{cases} k = x + 2 \\ y = 3 - x - 2 \\ z = 1 + x + 2 \end{cases}$$

D'où le système d'équations cartésiennes : $d \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$

b. $B \in d \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2 - 1 = 0 \\ 4 - 1 + 3 = 0 \end{cases}$ non vérifié, donc $B \notin d$.

c. $P(x;y;z) \in \pi \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x = -2 + k \\ y = 3 - k \\ z = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2 + k) - (3 - k) + (1 + k) = 4 \\ x = -2 + k \\ y = 3 - k \\ z = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

La droite d perce le plan π au point $P(-1;2;2)$.

2. $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 4x + 5y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2z + 1 \\ 4(y + 2z + 1) + 5y + z = 4 \\ (y + 2z + 1) + 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2z + 1 \\ 9y + 9z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2z + 1 \\ y = -z \\ 0z = 0 \end{cases}$

Système simplement indéterminé.

Posons $z = k;\ k \in \mathbb{R}$. On a alors : $y = -k$ et $x = k + 1$

$S = \{(k + 1;\ -k;\ k);\ k \in \mathbb{R}\}$

Interprétation : le système est formé par les équations cartésiennes de trois plans sécants selon la droite d de repère $(A;\vec{u})$ avec $A(1;0;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice II

1. Tirage sans remise et avec ordre de 5 cartes parmi 32.

   a. Nombre de tirages : $A_{32}^{5} = \dfrac{32!}{(32-5)!} = 24\,165\,120$

   b. On tire 3 cœurs parmi 8, suivis de 2 trèfles parmi 8 :

   $$A_8^3 \cdot A_8^2 = \frac{8!}{(8-3)!} \cdot \frac{8!}{(8-2)!} = 18816$$

2. Tirages sans remise et sans ordre de 5 cartes parmi 32.

   a. On tire 2 rois parmi 4, 1 dame parmi 4 et 2 cartes parmi les $32 - 2 \cdot 4 = 24$ restantes :

   $$C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_{24}^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{24!}{22!2!} = 6624$$

   b. On tire 5 cartes parmi les 28 cartes « non roi » : $C_{28}^5 = \dfrac{28!}{23!5!} = 98280$

   c. Nombre de tirages d'au moins un roi = nombre total de tirages – nombre de tirages ne comportant aucun roi :

   $$C_{32}^5 - C_{28}^5 = \frac{32!}{27!5!} - \frac{28!}{23!5!} = 201376 - 98280 = 103096$$

Exercice III

a. $e^x \cdot e^{-2} = \dfrac{\sqrt{e}}{e^{2x}}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{x-2} = e^{\frac{1}{2}-2x}$

$\Leftrightarrow x - 2 = \dfrac{1}{2} - 2x$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{6}$

$S = \left\{\dfrac{5}{6}\right\}$

b. $\ln(3-x) + \ln(x+2) - 2\ln(x-1) \leq 0$ $\qquad D = \left]1;3\right[$

$\Leftrightarrow \ln(3-x)(x+2) \leq \ln(x-1)^2$

$\Leftrightarrow (3-x)(x+2) \leq (x-1)^2$ car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_0^+$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0$

$\Delta = 9 + 40 = 49 \qquad x = \dfrac{3 \pm 7}{4} = \begin{cases} \dfrac{5}{2} \\ -1 \end{cases}$

x		-1		$\frac{5}{2}$	
$2x^2-3x-5$	+	0	−	0	+

$S = \left(\left]-\infty ; -1\right] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[\right) \cap \left]1;3\right[= \left[\frac{5}{2} ; 3\right[$

Exercice IV

1. $f(x) = x^2 \ln x$ $\qquad\qquad$ $dom\, f = \mathbb{R}_0^+ = dom\, f'$

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x$$

$$f(e) = e^2 \ln e = e^2 \qquad f'(e) = 2e\ln e + e = 2e + e = 3e$$

Equation de la tangente à C_f au point d'abscisse e :

$$y = f(e) + f'(e)(x-e) \Leftrightarrow y = 3ex - 2e^2$$

2. $I = \int_0^1 (2-3x)e^{-2x}\, dx$ $\qquad$ par parties : posons $\qquad u(x) = 2-3x \quad v'(x) = e^{-2x}$

$$u'(x) = -3 \qquad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}(2-3x)e^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{3}{2}e^{-2x}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(2-3)e^{-2} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^0\right] - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2e^2} + 1 + \frac{3}{4e^2} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{5}{4e^2} + \frac{1}{4}$$

3. $F = \int_1^x \frac{t-1}{t^2-2t+3}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2t-2}{t^2-2t+3}\, dt = \left[\frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+3\right|\right]_1^x = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+3\right) - \frac{1}{2}\ln 2$

Exercice V

1. $y_P = y_d \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

$$\Delta = 9 + 16 = 25 \qquad x = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

La parabole et la droite se coupent aux points d'abscisses 1 et -4.

2. $y_P \geq y_d \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0$

x		-1		4	
$x^2 + 3x - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]4\,;+\infty[$, la parabole domine la droite

Sur $]-1;\,4[$ la droite domine la parabole.

3. $A = \int_{-1}^{4} \left((x+3) - (x^2 + 4x - 1) \right) dx$

$$= \int_{-1}^{4} \left(-x^2 - 3x + 4 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^{4}$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - \frac{64}{3} + 24 + 16$$

$$= \frac{125}{6}\ u.a.$$