Corrigé GEF juin 2015

Question 1

$$\begin{cases} x-2y=-z-10{,}5 \\ y-x=2 \\ x+y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=-10{,}5 & (1) \\ -x+y \quad =2 & (2) \ \vert +(1) \\ x+y-z=0 & (3) \ \vert \cdot(-1)+(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=-10{,}5 & (1) \\ -y+z=-8{,}5 & (2') \ \vert \cdot(-3) \\ -3y+2z=-10{,}5 & (3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=-10{,}5 & (1) \\ -y+z=-8{,}5 & (2') \\ -z=15 & (3'') \end{cases}$$

$(3'') \Leftrightarrow z=-15$

$\to (2')$: $-y-15=-8{,}5 \Leftrightarrow y=-6{,}5$

$\to (1)$: $x+13-15=-10{,}5 \Leftrightarrow x=-8{,}5$

$S=\{(-8{,}5;-6{,}5;-15)\}$

Question 2

Pour fabriquer x pièces de type A et y pièces de type B il faut $2x+y$ minutes. Or on veut analyser la production en 1 heure, d'où : $2x+y \leq 60$

De plus $x \leq 24$ et $y \leq 36$ avec x, y entiers.

Enfin $x+y \leq 45$

Ainsi les entiers x et y doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} 2x+y \leq 60 & (1) \\ 0 \leq x \leq 24 & (2) \\ 0 \leq y \leq 36 & (3) \\ x+y \leq 45 & (4) \end{cases}$$

posons : $d_1 \equiv 2x+y=60 \equiv y=-2x+60$

$2\cdot 0+0 \leq 60$ vrai donc $O \in S_1$

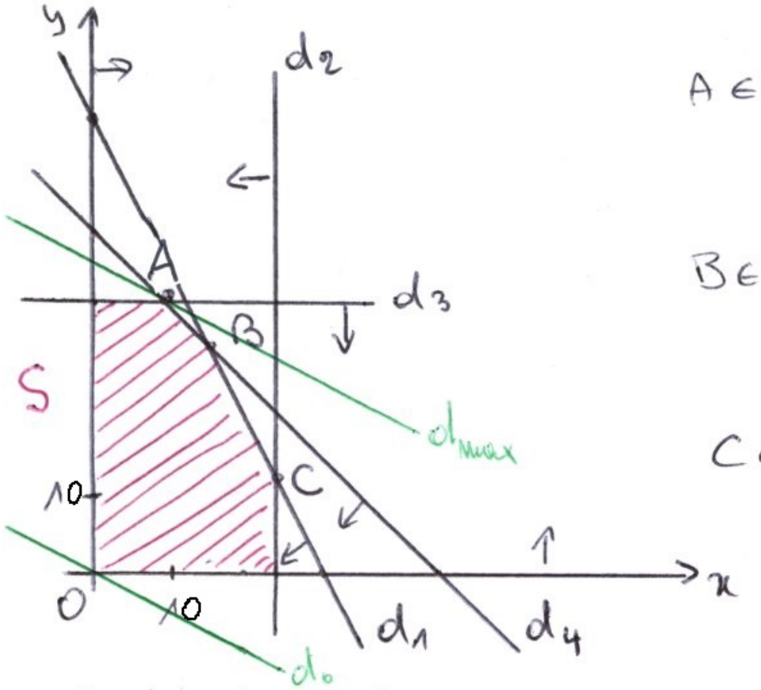
$d_2 \equiv x=24$

$d_3 \equiv y=36$

$d_4 \equiv x+y=45 \equiv y=-x+45$

$0+0 \leq 45$ vrai donc $O \in S_2$

(repère : 1cm pour 10 unités sur les deux axes)



$A \in d_3 \cap d_4 : \begin{cases} y = 36 \\ y = -x+45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 \\ x = 45-36 = 9 \end{cases}$

donc $A(9;36)$

$B \in d_1 \cap d_4 : \begin{cases} y = -2x+60 \\ y = -x+45 \end{cases} \rightarrow -2x+60 = -x+45$
$15 = x$
$y = -15+45 = 30$

donc $B(15;30)$

$C \in d_2 \cap d_1 : \begin{cases} x = 24 \\ y = -2x+60 \end{cases} \quad y = -48+60 = 12$

donc $C(24;12)$

Soit p le profit réalisé : $p = 100x + 200y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{p}{200} \equiv d_p$

$\forall p \quad d_p \parallel d_0 \,, \, d_0 \equiv y = -\frac{1}{2}x$

Graphiquement on voit que le profit horaire est maximal pour $A \in d_p \Leftrightarrow 36 = -\frac{1}{2}\cdot 9 + \frac{p}{200} \quad | \cdot 200$

$\Leftrightarrow 7200 = -900 + p$

$\Leftrightarrow p = 8100$

Conclusion

on obtient un profit horaire maximal de 8100 € en produisant 9 pièces de type A et 36 pièces de type B.

Question 3

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{10}x^2 - \frac{6}{5}x - 5$

a) $f'(x) = \frac{3}{3}x^2 + \frac{13\cdot 2}{10_5}x - \frac{6}{5} = x^2 + \frac{13}{5}x - \frac{6}{5}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{5}x - \frac{6}{5} = 0 \quad | \cdot 5 \Leftrightarrow 5x^2 + 13x - 6 = 0$

$\Delta = 13^2 + 4\cdot 5\cdot 6 = 289 = 17^2$

$x' = \frac{-13+17}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$x'' = \frac{-13-17}{10} = -3$

tableau de variation :

x		-3		$0{,}4$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗	1,3 maximum	↘	≈ −5,25 minimum	↗

$f''(x) = 2x + \frac{13}{5}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{13}{5} = 0 \,|\cdot 5 \Leftrightarrow 10x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{13}{10} \Leftrightarrow x = -1{,}3$

tableau de concavité:

x		$-1{,}3$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$\approx -1{,}98$	$\smile$

$I(-1{,}3\,;\,-1{,}98)$ = point d'inflexion

b) $t \equiv y = ax + b$ (tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0)

$a = \text{pente} = f'(0) = -\frac{6}{5}$ donc $t \equiv y = -\frac{6}{5}x + b$

$A(0, f(0)) = A(0\,;-5) \in t$ donc $-5 = -\frac{6}{5}\cdot 0 + b \Leftrightarrow b = -5$

D'où: $t \equiv y = -\frac{6}{5}x - 5$

<u>Question 4</u>

a) 1) $5\cdot 10^x - 4 = 6 + 2\cdot 10^x$

$5\cdot 10^x - 2\cdot 10^x = 6+4$

$3\cdot 10^x = 10$

$10^x = \frac{10}{3}$

$\underline{x = \log \frac{10}{3}}$

2) $3 - \log(2-x) = 5$

$3 - 5 = \log(2-x)$

$-2 = \log(2-x)$

$10^{-2} = 2 - x$

$x = 2 - 10^{-2}$

$\underline{x = 1{,}99}$

3) $2\log_5 x - 8 = 2 - 3\log_5 x$

$2\log_5 x + 3\log_5 x = 2 + 8$

$5\log_5 x = 10 \quad |:5$

$\log_5 x = 2$

$x = 5^2$

$\underline{x = 25}$

b) $\log a^7 = 7 \cdot \log a = 7 \cdot 3{,}41 = 23{,}87$

$\log(a \cdot b) = \log a + \log b = 3{,}41 + 2{,}17 = 5{,}58$

$\log \sqrt{b} = \frac{1}{2} \log b = \frac{1}{2} \cdot 2{,}17 = 1{,}085$

$\log \frac{b}{a} = \log b - \log a = 2{,}17 - 3{,}41 = -1{,}24$

Question 5

a)

	A	B	C	Totaux
Hommes	36 %	38−24,7 = 13,3 %	8,5 %	57,8 %
Femmes	45−36 = 9 %	24,7 %	8,5 %	42,2 %
total	45 %	38 %	17 %	100 %

80 % de 45 % = $0{,}8 \cdot 45 = 36$ %

65 % de 38 % = $0{,}65 \cdot 38 = 24{,}7$ %

$100 - 45 - 38 = 17$ % et $17 : 2 = 8{,}5$ %

b) p(homme sachant qu'il a voté pour B) $= \frac{13{,}3}{38} \simeq 0{,}34$

c) p(homme et a voté pour C) $= \frac{8{,}5}{100} = 0{,}085$

d) p(femme) $= \frac{42{,}2}{100} = 0{,}422$

Question 6

a) p(gagner le tiercé dans l'ordre) $= \frac{1}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{1}{2730}$

b) $\underbrace{8 \text{ trèfles}}\ \underbrace{8 \text{ coeurs}}\ \underbrace{16 \text{ autres}}$

$p(2 \text{ trèfles} + 2 \text{ coeurs} + 2 \text{ autres}) = \frac{C_8^2 \cdot C_8^2 \cdot C_{16}^2}{C_{32}^6} = \frac{280}{2697} \simeq 0{,}10$

c) $\underbrace{\text{valet de pique}}\ \underbrace{3 \text{ autres valets}}\ \underbrace{12 \text{ autres piques}}\ \underbrace{36 \text{ autres}}$

avec valet de pique : $12 \cdot C_{36}^3 = 85'680$ poss.

sans ———————— : $3 \cdot C_{12}^2 \cdot C_{36}^2 = 124'740$ poss

Total $= 210'420$ poss

$p(1V + 2 \text{ piques}) = \frac{210\,420}{C_{52}^5} \simeq 0{,}08$

d) $\underbrace{L_1}_{26} \cdot \underbrace{L_2}_{26} \cdot \underbrace{C_1}_{10} \cdot \underbrace{C_2}_{10} \cdot \underbrace{C_3}_{10} \cdot \underbrace{C_4}_{10}$

Nombre de plaques $= 26^2 \cdot 10^4 = 6'760'000$