Corrigé

I) $\begin{cases} 3x - y + z = 2 & (1) \\ 4x + 2y - 3z = 7 & (2) \\ x + 3y - 4z = 5 & (3) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow z = 2 - 3x + y \quad (1')$

Dans (2) : $4x + 2y - 3(2 - 3x + y) = 7$

$4x + 2y - 6 + 9x - 3y = 7$

$13x - y = 13$

Dans (3) : $x + 3y - 4(2 - 3x + y) = 5$

$x + 3y - 8 + 12x - 4y = 5$

$13x - y = 13$

$\begin{cases} 13x - y = 13 \\ 13x - y = 13 \end{cases}$ système simplement indéterminé

$-y = 13 - 13x$

$y = -13 + 13x$

Dans (1') : $z = 2 - 3x - 13 + 13x$

$z = -11 + 10x$

pos : $x = \alpha$

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -13 + 13\alpha \\ z = -11 + 10\alpha \end{cases}$

$S = \{(\alpha, -13 + 13\alpha, -11 + 10\alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

Les 3 plans se coupent suivant une droite d passant par le point $A(0, -13, -11)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 13, 10)$.

II) 1) $M(x, y, z) \in AB \Leftrightarrow \vec{AM} = k\,\vec{AB} \quad (k \in \mathbb{R})$ $\quad \vec{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = -4k & (1) \\ y + 2 = 5k & (2) \\ z - 1 = -2k & (3) \end{cases}$ éq. param. de AB

$(1) \Rightarrow k = \dfrac{x-4}{-4} \qquad (2) \Rightarrow k = \dfrac{y+2}{5} \qquad (3) \Rightarrow k = \dfrac{z-1}{-2}$

D'où : $\dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{y+2}{5}$

$5x - 20 = -4y - 8$

$5x + 4y - 12 = 0$

D'où : $\dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-1}{-2}$

$-2y - 4 = 5z - 5$

$2y + 5z - 1 = 0$

$$\begin{cases} 5x + 4y - 12 = 0 \\ 2y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$$ éq. cart. de AB

2) $C(x_c, y_c, -3) \in AB$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_c + 4y_c - 12 = 0 & (1) \\ 2y_c - 15 - 1 = 0 & (2) \Rightarrow 2y_c = 16 \Rightarrow y_c = 8 \end{cases}$$

Dans (1) : $5x_c + 32 - 12 = 0 \Rightarrow 5x_c = -20 \Rightarrow x_c = -4$

$C(-4, 8, -3)$

III) 1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2x+10} \geq \left(\frac{25}{4}\right)^{3x-1}$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-10} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{6x-2}$$

$$2x - 10 \geq 6x - 2$$

$$-4x \geq 8 \quad | : (-4)$$

$$x \leq -2$$

$S =]-\infty, -2]$

2) $2\log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}}(3-x) \leq \log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$

<u>Cond:</u> $\cdot\ x > 0$ $\qquad \cdot\ 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

$\cdot\ 3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$

$D =]\frac{1}{2}, 3[$

$$\log_{\frac{1}{3}} x^2 \leq \log_{\frac{1}{3}}(2x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(3-x)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x^2 \leq \log_{\frac{1}{3}}[(2x-1)(3-x)]$$

$$x^2 \geq 6x - 2x^2 - 3 + x$$

$$3x^2 - 7x + 3 \geq 0$$

$\Delta = 49 - 36 = 13$ $\qquad x_i = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6} \to 1{,}77 \ ;\ \to 0{,}57$

x	$-\infty$		$\frac{7-\sqrt{13}}{6}$		$\frac{7+\sqrt{13}}{6}$		$+\infty$
$3x^2 - 7x + 3$		+	0	−	0	+	

$\Rightarrow x \in]-\infty, \frac{7-\sqrt{13}}{6}] \cup [\frac{7+\sqrt{13}}{6}, +\infty[$

$S =]\frac{1}{2}, \frac{7-\sqrt{13}}{6}] \cup [\frac{7+\sqrt{13}}{6}, 3[$

IV) 1) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^x - 3}$

<u>Cond</u> : $e^x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \ln 3$

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$

$$f'(x) = \frac{(e^x - 3)\, 3e^{3x} - e^{3x} \cdot e^x}{(e^x - 3)^2}$$

$$= \frac{e^{3x}\,(3e^x - 9 - e^x)}{(e^x - 3)^2}$$

$$= \frac{e^{3x}\,(2e^x - 9)}{(e^x - 3)^2}$$

2) $f(x) = (1-x)^2 \ln(1-x)$

<u>Cond</u> : $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

$\mathrm{Dom}\, f =]-\infty, 1[$

$$f'(x) = 2\,(1-x)\cdot(-1)\ln(1-x) + (1-x)^{\cancel{2}} \cdot \frac{-1}{\underset{1}{\cancel{1-x}}}$$

$$= -2\,(1-x)\ln(1-x) - 1 + x$$

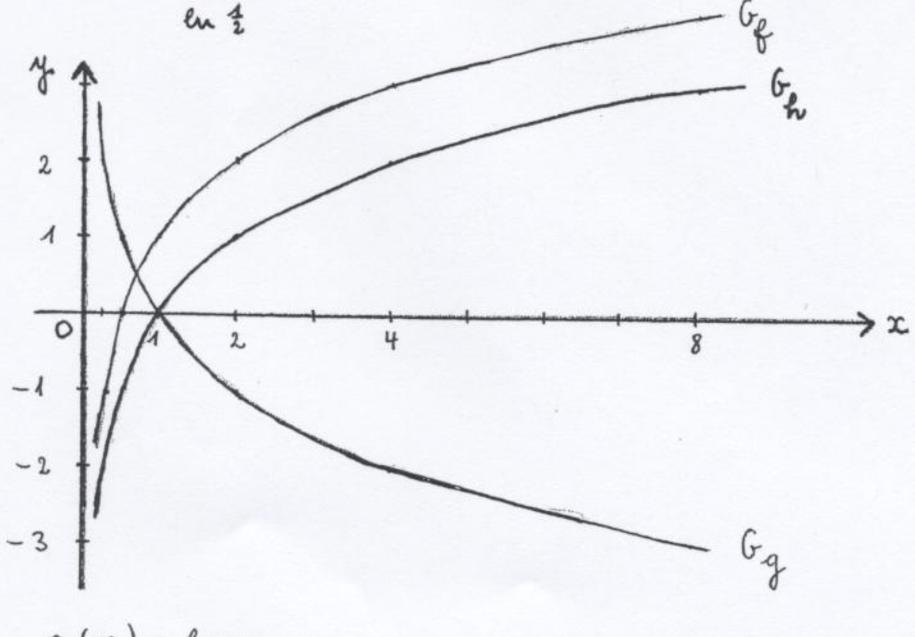
<u>ou</u> : $f'(x) = -(1-x)\,[2\ln(1-x) + 1]$

$$= (x-1)\,[2\ln(1-x) + 1]$$

V) 1) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$= \dfrac{\ln x}{\ln \frac{1}{2}}$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	2	1	0	-1	-2	-3



2) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ symétrie par rapport à (Ox)

$h(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x = -g(x)$ déplacement d'une unité vers le haut

$f(x) = 1 - \log_{\frac{1}{2}} x = 1 + h(x)$

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \log_{\frac{1}{2}} x = 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ = racine de f

VI) 1) $f(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x} = -(2 - \ln x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$

$F(x) = -\dfrac{(2-\ln x)^2}{2} + c$

$F(e) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + c = 2 \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$

$F(x) = -\dfrac{(2-\ln x)^2}{2} + \dfrac{5}{2}$

2) $I = \int_0^1 (x-1)\, e^{-2x}\, dx$

$u(x) = x - 1 \qquad v'(x) = e^{-2x}$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = \dfrac{e^{-2x}}{-2}$

$I = -\frac{1}{2}\left[(x-1)\, e^{-2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\, dx$

$= -\frac{1}{2}(0 + 1) + \frac{1}{2}\left[\dfrac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(e^{-2} - 1)$

$= -\frac{1}{2} - \dfrac{1}{4e^2} + \frac{1}{4}$

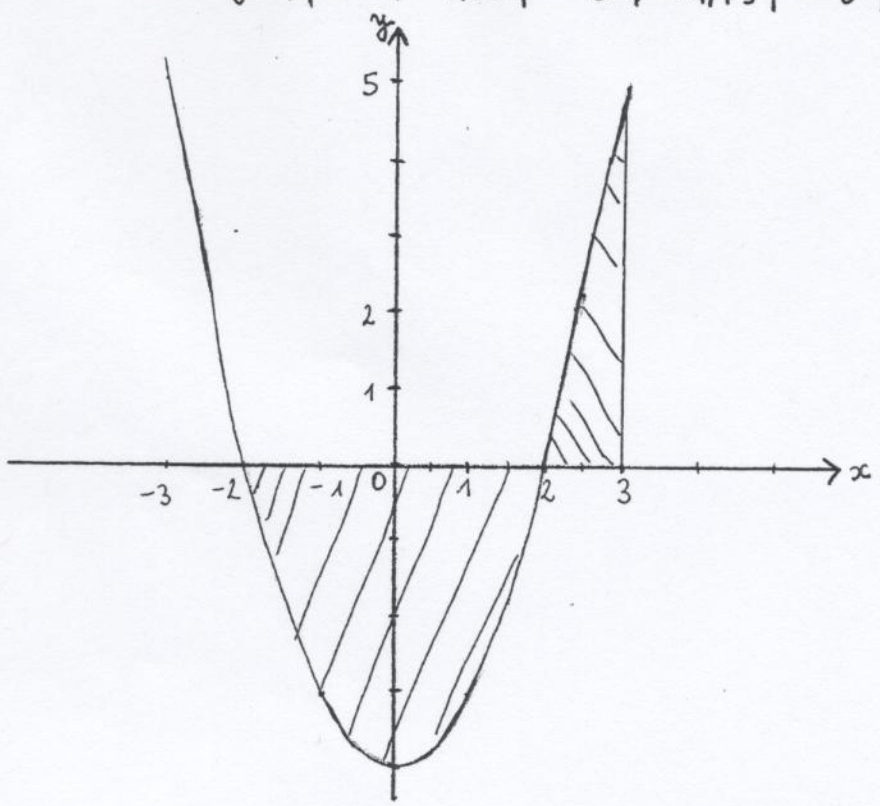
$= -\frac{1}{4} - \dfrac{1}{4e^2}$

$I = \dfrac{-e^2 - 1}{4e^2}$

VII) $f(x) = x^2 - 4$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	-4	$-3{,}75$	-3	$-1{,}75$	0	2,25	5

1)



2) $a = -\int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$

$= -\int_{-2}^{2} (x^2-4)\,dx + \int_{2}^{3} (x^2-4)\,dx$

$= -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3}$

$= -\left(\frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8\right) + \left(\frac{27}{3} - 12 - \frac{8}{3} + 8\right)$

$= -\frac{16}{3} + 16 + 5 - \frac{8}{3}$

$= 21 - 8$

$a = 13$ u.a. (cm^2)