LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022
CORRIGÉ – BARÈME

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 2	CC	*Date de l'épreuve :*	13.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:10

Question 1 [4 points]

voir EM66 page 67

Question 2 [5+4+3=12 points]

1) $\log_{\sqrt{3}}(1+2x) + \log_{\frac{1}{3}}(1-x) \leq \log_3(1-2x) \qquad (I)$

Conditions d'existence :

- $1+2x > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$
- $1-x > 0 \iff x < 1 \qquad D = \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$
- $1-2x > 0 \iff x < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
(\forall x \in D)\quad (I) &\iff \frac{\log_3(1+2x)}{\log_3(\sqrt{3})} + \frac{\log_3(1-x)}{\log_3(\frac{1}{3})} \leq \log_3(1-2x)\\
&\iff \frac{\log_3(1+2x)}{\frac{1}{2}\log_3 3} + \frac{\log_3(1-x)}{-\log_3 3} \leq \log_3(1-2x)\\
&\iff 2\log_3(1+2x) - \log_3(1-x) \leq \log_3(1-2x)\\
&\iff \log_3(1+2x)^2 \leq \log_3(1-2x) + \log_3(1-x)\\
&\iff \log_3(1+2x)^2 \leq \log_3[(1-2x)(1-x)]\\
&\iff (1+2x)^2 \leq (1-2x)(1-x) \quad \text{car } \log_3 \text{ est une bij. str. croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\
&\iff 4x^2+4x+1 \leq 1-3x+2x^2\\
&\iff 2x^2+7x \leq 0\\
&\iff x(2x+7) \leq 0\\
&\iff x \in \left[-\tfrac{7}{2}:0\right]
\end{aligned}$$

$$S = \left[-\tfrac{7}{2}:0\right] \cap D = \left]-\tfrac{1}{2};0\right]$$ [5]

2) $\dfrac{-1-e^{-2x}}{1+e^{2x}} + \frac{1}{4} = 0 \qquad (E)$

Condition d'existence : $1+e^{2x} \neq 0$ toujours vérifié, donc $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (E) &\iff 4\cdot(-1-e^{-2c^x}) + 1 + e^{2x} = 0\\
&\iff e^{2x} - 3 - 4e^{-2x} = 0 \qquad | \cdot e^{2x} \neq 0\\
&\iff e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0
\end{aligned}$$

Posons $e^{2x} = y$, avec $y > 0$.

$(\forall y \in \mathbb{R}_+*) \quad (E) \iff y^2 - 3y - 4 = 0 \iff \underbrace{y=-1}_{\text{à écarter}} \vee y = 4$

$$\begin{aligned} y=4 &\iff e^{2x}=4 \\ &\iff 2x=\ln 4 \\ &\iff x=\tfrac{1}{2}\ln 4 \\ &\iff x=\ln 2 \end{aligned}$$

$S=\{\ln 2\}$ [4]

3) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}x+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5-6}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}x+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-6}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}x+1}$$

$$= \lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-6}{y}-5\right)+1} \qquad \left(y=\frac{-6}{x+5} \iff x=-\frac{6}{y}-5;\ \text{si } x\to-\infty,\ \text{alors } y\to0\right)$$

$$= \lim_{y\to0}(1+y)^{-\frac{3}{y}-\frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{y\to0}\Bigg[\underbrace{(1+y)^{\frac{1}{y}}}_{\to e}\Bigg]^{-3}\cdot\underbrace{(1+y)^{-\frac{3}{2}}}_{\to1}$$

$$= e^{-3}$$

$$= \frac{1}{e^3}$$

[3]

Question 3 **[(4+1,5+5,5+1+3)+5=20 points]**

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^2-6x+10)e^{x-1}$$

1) (a) $\text{Dom}f=\mathbb{R}$. [0.5]

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\cdot\underbrace{(x^2-6x+10)}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{e^{x-1}}_{\to0} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-6x+10}{e^{-x+1}} \qquad \frac{\infty}{\infty} \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-6}{-e^{-x+1}} \qquad \frac{\infty}{\infty} \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{e^{-x+1}} \\ &= 0 \qquad\qquad A.H.G: y=0 \end{aligned}$$

[1.5]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\underbrace{(x^2-6x+10)}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{e^{x-1}}_{\to+\infty}=+\infty \qquad \text{pas d'}A.H.D.$$

Calcul à part : $\lim_{x\to+\infty}(x^2-6x+10)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \underbrace{\left(x-6+\frac{10}{x}\right)}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{e^{x-1}}_{\to+\infty} = +\infty$$

pas d'$A.O.D.$ ($B.P.$ dir. (Oy)) [2]

(b) $\text{Dom} f' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot(2x-6)\cdot e^{x-1} + \frac{1}{2}\cdot(x^2-6x+10)\cdot e^{x-1} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(x^2-6x+10+2x-6)\cdot e^{x-1} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(x^2-4x+4)\cdot e^{x-1} \\ &= \frac{(x-2)^2\cdot e^{x-1}}{2} \end{aligned}$$

[1,5]

(c) $\text{Dom} f'' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(x-2)\cdot e^{x-1} + \frac{(x-2)^2}{2}\cdot e^{x-1} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(x-2)(2+x-2)\cdot e^{x-1} \\ &= \frac{x(x-2)\cdot e^{x-1}}{2} \end{aligned}$$

[1]

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff \frac{(x-2)^2\cdot e^{x-1}}{2}=0 \\ &\iff (x-2)^2=0 \\ &\iff x=2 \end{aligned}$$

[1]

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\iff \frac{x(x-2)\cdot e^{x-1}}{2}=0 \\ &\iff x(x-2)=0 \\ &\iff x=0 \ \vee\ x=2 \end{aligned}$$

[1]

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{5}{e}$	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$
G_f		$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I. (*)	$\smile$	

(*) P.I. à tangente horizontale

La fonction f n'admet ni maximum, ni minimum.

Points d'inflexion : $I_1\left(0;\frac{5}{e}\right)$ et $I_2\,(2;e)$. [2,5]

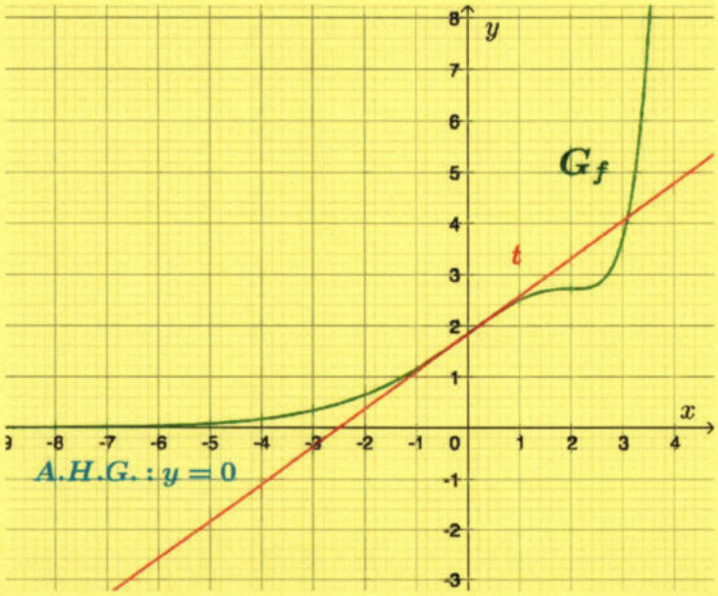
(d) $f(0)=\dfrac{5}{e}$ $\qquad f'(0)=\dfrac{2}{e}$

$$t \equiv y = f(0)+f'(0)(x-0) \iff y=\frac{2}{e}x+\frac{5}{e}$$

[1]

(e)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,6$	$1,2$	$1,8$	$2,5$	$2,7$	$3,7$	$20,1$



[3]

2) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) > 0$ (d'après le graphique ou le tableau de variation).

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-3}^{3} f(x)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}(x^2-8x+18)e^{x-1}\right]_{-3}^{3} \\
&= \frac{1}{2}(9-24+18)e^2 - \frac{1}{2}(9+24+18)e^{-4} \\
&= \frac{3e^2}{2} - \frac{51}{2e^4} \\
&\approx 10,62 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

[2]

Calcul à part :

$$\int (x^2-6x+10)\cdot e^{x-1}dx$$

ipp. $u(x) = x^2-6x+10 \qquad v'(x) = e^{x-1}$
$u'(x) = 2x-6 \qquad v(x) = e^{x-1}$

$$= (x^2-6x+10)e^{x-1} - \int (2x-6)e^{x-1}dx$$

ipp. $u(x) = 2x-6 \qquad v'(x) = e^{x-1}$
$u'(x) = 2 \qquad v(x) = e^{x-1}$

$$\begin{aligned}
&= (x^2-6x+10)e^{x-1} - (2x-6)e^{x-1} + \int 2\cdot e^{x-1}dx \\
&= (x^2-8x+16)e^{x-1} + 2e^{x-1} + c \\
&= (x^2-8x+18)e^{x-1} + c \qquad (c \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

[3]

Question 4 **[5+5+5=15 points]**

1) $I = \int_1^{e^2} \frac{3\ln x - 2x^2 \ln^2 x}{x^3}\, dx = \int_1^{e^2} \left(\frac{3\ln x}{x^3} - \frac{2\ln^2 x}{x}\right) dx$

Calculs à part :

$\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ i.p.p. $u(x) = \ln x$ $v'(x) = \frac{1}{x^3}$ $u'(x) = \frac{1}{x}$ $v(x) = -\frac{1}{2x^2}$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3}\, dx$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2x^2} + c$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c'$$

$$I = \left[\frac{-3\ln x}{2x^2} - \frac{3}{4x^2} - \frac{2\ln^3 x}{3}\right]_1^{e^2}$$

$$= \frac{-3\ln e^2}{2e^4} - \frac{3}{4e^4} - \frac{2\ln^3(e^2)}{3} + \frac{3}{2}\ln 1 + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\ln^3 1$$

$$= \frac{-6}{2e^4} - \frac{3}{4e^4} - \frac{2[\ln(e^2)]^3}{3} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{-3}{e^4} - \frac{3}{4e^4} - \frac{2 \cdot 8}{3} + \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{15}{4e^4} - \frac{55}{12} \qquad (\approx -4,65)$$

[5]

2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 + \cos^2 x) \cdot \sin^3 x\, dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 + \cos^2 x) \cdot \sin^2 x \cdot \sin x\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 + \cos^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - \cos^4 x) \cdot \sin x\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (\sin x - \cos^4 x \cdot \sin x)\, dx$$

$$= \left[-\cos x + \tfrac{1}{5}\cos^5 x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$= -\cos\left(\tfrac{5\pi}{6}\right) + \tfrac{1}{5} \cdot \left(\cos\tfrac{5\pi}{6}\right)^5 + \cos\tfrac{\pi}{6} - \tfrac{1}{5}\left(\cos\tfrac{\pi}{6}\right)^5$$

$$= \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{5}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$$

$$= \sqrt{3} - \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{9\sqrt{3}}{32}\right)$$

$$= \tfrac{71\sqrt{3}}{80}$$

[5]

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x^2+12x}{(4x^2+1)(4x+1)}\,dx$

$$\begin{aligned}\frac{8x^2+12x}{(4x^2+1)(4x+1)} &= \frac{ax+b}{4x^2+1}+\frac{c}{4x+1}\\ &= \frac{(ax+b)(4x+1)+c(4x^2+1)}{(4x^2+1)(4x+1)}\\ &= \frac{(4a+4c)x^2+(a+4b)x+(b+c)}{(4x^2+1)(4x+1)}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients :

$$\begin{cases}4a+4c=8\\ a+4b=12\\ b+c=0\end{cases} \iff \begin{cases}a+c=2\\ a+4b=12\\ b+c=0\end{cases} \iff \begin{cases}a+c=2\\ 5c=-10\\ b=-c\end{cases} \iff \begin{cases}a=4\\ c=-2\\ b=2\end{cases}$$

D'où : $\displaystyle\frac{8x^2+12x}{(4x^2+1)(4x+1)} = \frac{4x+2}{4x^2+1}+\frac{-2}{4x+1}$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x^2+12x}{(4x^2+1)(4x+1)}\,dx\\ =\ &\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4x}{4x^2+1}+\frac{2}{4x^2+1}+\frac{-2}{4x+1}\right)dx\\ =\ &\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{8x}{4x^2+1}+\frac{2}{(2x)^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4x+1}\right)dx\\ =\ &\left[\frac{1}{2}\cdot\ln|4x^2+1|+\text{Arctan}(2x)-\frac{1}{2}\ln|4x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}\\ =\ &\frac{1}{2}\ln 2+\text{Arctan}\ 1-\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 1+\text{Arctan}\ 0+\frac{1}{2}\ln 1\\ =\ &\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

[5]

Question 5 (au choix) **[6+3=9 points]**

$f(x) = 2x-1-3\ln\dfrac{x}{x+2}$

1) Conditions d'existence : $x+2\neq 0 \ \wedge\ \dfrac{x}{x+2}>0 \iff x<-2 \ \vee\ x>0$

Dom$f$ $=]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x-1-3\ln\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\to 1}) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x-1-3\ln\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\to 1}) = +\infty$

Il n'y a ni A.H.G, ni A.H.D. [2]

Posons $y = 2x - 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (2x-1)] = \lim_{x\to\pm\infty}(-3\ln\frac{x}{x+2}) = 0$$

Par conséquent, G_f admet comme A.O. la droite $\Delta \equiv y = 2x - 1$. [2]

- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}(2x - 1 - 3\ln\underbrace{\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\to+\infty}}_{\to+\infty}) = -\infty$ A.V. : $x = -2$ [1]

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x - 1 - 3\ln\underbrace{\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\to0^+}}_{\to-\infty}) = +\infty$ A.V. : $x = 0$ [1]

2) Soit $M(x;f(x)) \in G_f$ et $P(x;y) \in \Delta$

$f(x) - y = -3\ln\frac{x}{x+2}$

$$\begin{aligned} f(x) - y > 0 &\iff -3\ln\frac{x}{x+2} > 0 \\ &\iff \ln\frac{x}{x+2} < 0 \\ &\iff \frac{x}{x+2} < 1 \quad \text{car la fct ln est strict. croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \frac{x}{x+2} - 1 < 0 \\ &\iff \frac{-2}{x+2} < 0 \\ &\iff x + 2 > 0 \\ &\iff x > -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	/	/	/	$+$	
		Δ/G_f	/	/	/	G_f/Δ	

[3]

Question 6 (au choix) **[2+6+1=9 points]**

$f(x) = 2x - 1 + \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{2x-1}_{\to-\infty} + \frac{\overbrace{e^{2x}}^{\to0}}{\underbrace{e^x+1}_{\to1}}\right) = -\infty$, donc G_f n'admet pas d'A.H.G.

D'après ce qui précède :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (2x-1)) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{e^x+1} = 0$, donc G_f admet l'A.O.G $\Delta \equiv y = 2x - 1$. [2]

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\underbrace{2x-1}_{\to+\infty} + \dfrac{\overbrace{e^{2x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^x+1}_{\to+\infty}} \right).$

Calcul à part :

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^x+1} \qquad \text{f.i.} \frac{\infty}{\infty} \\ = & \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^x(1+e^{-x})} \\ = & \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^{-x}} \\ = & +\infty \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et G_f n'admet pas d'A.H.D. [2]

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{\frac{e^{2x}}{e^x+1}}{x} \right).$$

Calcul à part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\frac{e^{2x}}{e^x+1}}^{\to+\infty}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}} \qquad \text{f.i. } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\begin{aligned} & \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2e^{2x}\cdot(e^x+1) - e^{2x}\cdot e^x}{(e^x+1)^2}}{1} \\ & = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\cdot(2e^x+2-e^x)}{(e^x+1)^2} \\ & = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\cdot(e^x+2)}{e^{2x}\cdot(1+e^{-x})^2} \\ & = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{(1+e^{-x})^2} \\ & = +\infty \end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et G_f n'admet pas d'A.O.D. [4]

3) Position de G_f par rapport à $\Delta \equiv y = 2x-1$:

Soit $M(x; f(x)) \in G_f$ et $P(x; y) \in \Delta$.

$f(x) - y = \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} > 0.$

On en déduit : $(\forall x \in \mathbb{R})$ G_f se situe au-dessus de Δ. [1]