LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
MATHÉMATIQUES II	C, D	Durée de l'épreuve : 2h 45min Date de l'épreuve : 19/09/2019

Théorie : (4 points)

Démontrez le théorème suivant :

Si f est continue sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur $[a\,;\,b]$,
alors, pour tout x de $[a\,;b]$, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.
En particulier : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, noté $[F(t)]_a^b$.

Exercice 1 : (1 + 5 + 4 + (1 + 1 + 1 + 1) = 14 points)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot [\ln^2(x) - 1]}$$

1) Donnez les domaines de définition et de dérivabilité.
2) Déterminez les limites et les asymptotes éventuelles.
3) Calculez la dérivée première et donnez le tableau de variation.
(Attention : on ne demande ni de dérivée seconde ni les coordonnées des extrema)
4) Calcul d'aire :
   a) Soit $I =]e\,;\,+\infty[$. Indiquez, en justifiant, le signe de f sur I.
   b) Montrez qu'une primitive de f sur I est F définie par : $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)+1}$.
   c) Considérez le réel $\lambda > e^2$. Calculez l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations respectives $x = e^2$ et $x = \lambda$.
   d) Déterminez ensuite $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f définie par

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + \ln(x)}{x}.$$

Étudiez le comportement asymptotique en $+\infty$ de la fonction f et étudiez la position de sa courbe représentative par rapport à une asymptote horizontale ou oblique éventuelle.

Exercice 3 : (3 + 4 = 7 points)

Calculez les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{2x-3}$

Exercice 4 : **(2 + 4 + 3 = 9 points)**

Calculez :

1) $\int_0^{\ln(7)} \frac{2e^x}{(2+e^x)^2} dx$
2) $\int (2x^2 + 3x) \cdot \cos(4x)\, dx$
3) $\int_e^{e^e} \frac{e}{x \cdot \ln(x)} dx$

Exercice 5 : **(5 + 6 = 11 points)**

Résolvez, dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes.

1) $[\log_3(x+3)]^2 - \log_3[(x+3)^2] - 3 = 0$
2) $\frac{e^{2x-3}}{e^x} \leq 2 - e^x$

Exercice 6 : **(5 points)**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$g(x) = \frac{9x^2 - x + 22}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}.$$

Déterminez les réels a, b et c tels que

$$g(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 4} + \frac{c}{x - 2}$$

et déduisez-en les primitives de g.

Exercice 7 : **(1,5 + 1,5 + 3 = 6 points)**

Soient les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2.$$

a) Déterminez, par un calcul, les abscisses des points d'intersection des deux représentations graphiques de f et de g.
b) Analysez la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.
c) Déterminez l'aire de la partie du plan délimitée par les deux graphes.