**Théorie : (2p + 2p = 4p)**
Voir livre p. 87.

**Exercice 1 : (4 + 5 = 9 points)**

1) $\frac{-1-e^{-1-x}}{4+e^x} + \frac{1}{4} \leq 0$

C.E. $e^x + 4 \neq 0$ tjs vrai
$dom_{rés} = \mathbb{R}$

$\forall x \in dom_{rés}$,

$\frac{-1-e^{-1-x}}{4+e^x} + \frac{1}{4} \leq 0$
$\Leftrightarrow \frac{-4-4e^{-1-x}+4+e^x}{4(4+e^x)} \leq 0 \mid \cdot 4(4+e^x) > 0$
$\Leftrightarrow -4 - 4e^{-1-x} + 4 + e^x \leq 0$
$\Leftrightarrow 4e^{-1-x} - e^x \geq 0 \ \mid\cdot e^x > 0$
$\Leftrightarrow 4e^{-1} - e^{2x} \geq 0$
$\Leftrightarrow \left(2e^{-\frac{1}{2}} - e^x\right)\left(\underbrace{2e^{-\frac{1}{2}} + e^x}_{>0}\right) \geq 0$
$\Leftrightarrow -e^x \geq -e^{\ln 2 - \frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow e^x \leq e^{\ln 2 - \frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow x \leq \ln 2 - \frac{1}{2}$

$\underline{\boldsymbol{S} = \left]-\infty; \mathbf{\ln 2 - \frac{1}{2}}\right]}$

2) $\log_{0,5}(4x^2 - 14) + 1 \geq 2 \cdot \log_{0,5}(x-1)$

C.E. 1) $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
2) $4x^2 - 14 > 0$ racines $x = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$
$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right[ \cup \left]\frac{\sqrt{14}}{2}; +\infty\right[$

$dom_{rés} = \left]\frac{\sqrt{14}}{2}; +\infty\right[$
$\log_{0,5}(4x^2 - 14) + 1 \geq 2 \cdot \log_{0,5}(x-1)$
$\Leftrightarrow \log_{0,5}(4x^2 - 14) + \log_{0,5}(0,5) \geq \log_{0,5}((x-1)^2)$
$\Leftrightarrow \log_{0,5}(2x^2 - 7) \geq \log_{0,5}((x-1)^2)$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 7 \leq (x-1)^2$ (bij. strictement décroissante)
$\Leftrightarrow 2x^2 - 7 - x^2 + 2x - 1 \leq 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+4) \leq 0$
$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$

$\boldsymbol{S} = \left]\mathbf{\frac{\sqrt{14}}{2}}; \mathbf{2}\right]$

**Exercice 2 : (4 points)**

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)^{x+1}$<br>$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x+1)\ln\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)}$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(x+1)}_{\to+\infty}\underbrace{\ln\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)}_{\to 0}$ f.i. « $0\cdot\infty$ »<br>$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)}{\frac{1}{x+1}}$<br>$\overset{Ⓗ}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+3}{2x+4}\cdot\frac{2(2x+3)-2(2x+4)}{(2x+3)^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$<br>$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)^2}{(2x+4)(2x+3)}$<br>$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$<br>donc $\underline{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x+1)\ln\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)} = e^{\frac{1}{2}}}}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x+3}\right)^{x+1}$ $(*)$<br>Posons $y = 2x+3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$,<br>si $x\to+\infty$, alors $y\to+\infty$<br>(*) s'écrit :<br>$= \lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}}$<br>$= \lim\limits_{y\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}_{\to e}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\underbrace{1+\frac{1}{y}}_{\to 1}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$<br>donc $\underline{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)^{x+1} = e^{\frac{1}{2}}}}$ |

**Exercice 3 : (0,5+5+4+4,5+3 = 17 points)**

On donne $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}$

**i) Domaine :**

C.E. $\frac{1}{2}x + 1 \neq 0$

$dom\, f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

**ii) Limites :**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{e^{2x}}^{\to 0^+}}{\underbrace{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}_{\to+\infty}} = \mathbf{0^+}$

$C_f$ admet une **A.H. d'équation $\boldsymbol{y = 0}$ en $\boldsymbol{-\infty}$**

b) $\lim\limits_{x\to(-2)}\frac{e^{2x}}{\underbrace{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}_{\to 0^+}} = +\infty$

$C_f$ admet une **A.V. d'équation $\boldsymbol{x = -2}$**

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{e^{2x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}_{\to+\infty}}$ f.i. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\overset{Ⓗ}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{2e^{2x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\frac{1}{2}x+1}_{\to+\infty}}$ f.i. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\overset{Ⓗ}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{\frac{1}{2}} = +\infty$ Asymptote oblique possible en $+\infty$

**Asymptotes obliques :**

<u>Asymptote oblique en $+\infty$</u>

Formules de Cauchy :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{2x}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2} \quad \text{f.i. « } \frac{\infty}{\infty} \text{ »} \qquad \text{avec : } x\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 = \frac{1}{4}x^3+x^2+x$$

$$\overset{Ⓗ}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{\frac{3}{4}x^2+2x+1} \quad \text{f.i. « } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}$$

$$\overset{Ⓗ}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{2x}}{\frac{3}{2}x+2} \quad \text{f.i. « } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}$$

$$\overset{Ⓗ}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{8e^{2x}}{\frac{3}{2}} = +\infty$$

donc $C_f$ admet une **B.P. dans la direction $(\boldsymbol{Oy})$ en $+\infty$.**

**iii) Dérivée première et tableau de variations :**

$\forall x \in dom\, f'$,

$$f'(x) = \left(\frac{e^{2x}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}\right)'$$

$$= \frac{2e^{2x}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 - e^{2x}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}x+1\right)e^{2x}\left(2\left(\frac{1}{2}x+1\right)-1\right)}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4}$$

$$= \frac{e^{2x}(x+1)}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3}$$

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $\frac{(x+1)}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3}$.

**Tableau de variations :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $\vdots$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vdots$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $f(-1)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$C_f$ admet un minimum local de valeur $f(-1) = \frac{e^{-2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{e^2} \cong 0{,}5$

**iv) Dérivée seconde et concavité :**

$$f''(x) = \left(\frac{e^{2x}(x+1)}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3}\right)'$$

$$= \frac{\left(2e^{2x}(x+1)+e^{2x}\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3 - e^{2x}(x+1)3\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^6}$$

$$= \frac{e^{2x}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2\left[(2(x+1)+1)\left(\frac{1}{2}x+1\right)-(x+1)\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\right]}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^6}$$

$$= \frac{e^{2x}\left[(2x+3)\left(\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right]}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4}$$

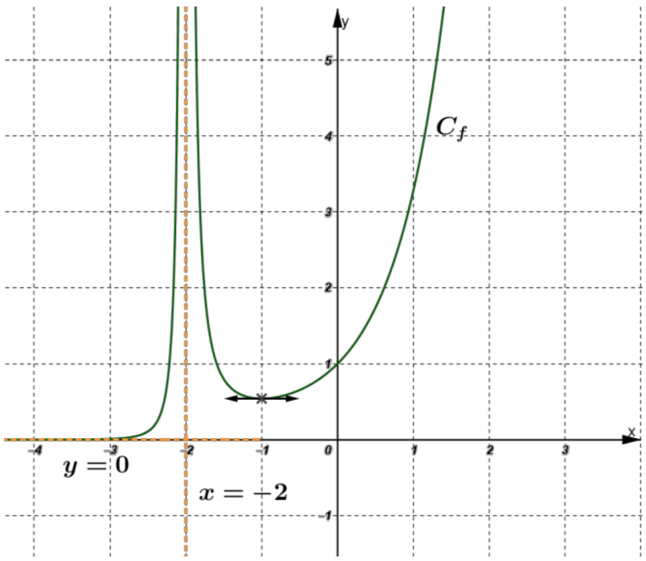
$$= \frac{e^{2x}\left[x^2+\frac{7}{2}x+3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right]}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4}$$

$$= \frac{e^{2x}\left[x^2+2x+\frac{3}{2}\right]}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4} > 0 \qquad \Delta = 4-6 < 0$$

**Tableau de concavité :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $C_f$ | | $\cup$ | $\|\|$ | $\cup$ | |

**v) Graphe de $C_f$**



**Exercice 4 : (5 + 4 + 5 = 14 points)**

1) Soit la fonction f définie par : $f : x \mapsto \frac{12x-2}{(3x^2-x+1)^2}$.

Déterminez la primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ pour laquelle $F(1) = \frac{4}{3}$.

Primitives de $f$ :

$$\int \frac{12x-2}{(3x^2-x+1)^2}dx$$
$$= 2\int \frac{6x-1}{(3x^2-x+1)^2}dx$$
$$= -\frac{2}{3x^2-x+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

Les primitives de $f$ sont données par : $F : x \mapsto -\frac{2}{3x^2-x+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$

$$F(1) = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} + k = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow k = 2$$

La primitive demandée est :

$$\underline{\boldsymbol{F: x \mapsto -\frac{2}{3x^2-x+1} + 2}}$$

2) Calculez $\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{5-4x}{25+16x^2}.\,dx$.

$$\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{5-4x}{25+16x^2}.\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{5}{4}} \left[\frac{5}{25\left(1+\left(\frac{4}{5}x\right)^2\right)} - \frac{4x}{25+16x^2}\right]dx$$
$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{\frac{4}{5}}{1+\left(\frac{4}{5}x\right)^2}dx - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{8\cdot 4x}{25+16x^2}dx$$
$$= \left[\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4}\arctan\left(\frac{4}{5}x\right)\right]_0^{\frac{5}{4}} - \left[\frac{1}{8}\ln|25+16x^2|\right]_0^{\frac{5}{4}}$$
$$= \frac{1}{4}(\arctan(1) - \arctan(0)) - \frac{1}{8}(\ln 50 - \ln 25)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\ln 2$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\ln 2}}$$

3) Calculez $\int e^{-2x}\cos(-2x)\,dx$.

Intégration par parties :

$$u_1'(x) = \cos(2x) \Rightarrow u_1(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$
$$v_1(x) = e^{-2x} \Rightarrow v_1'(x) = -2e^{-2x}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^{-2x}\cos(-2x)\,dx \\
&= \int e^{-2x}\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \int \left(-e^{-2x}\sin(2x)\right)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) + \int e^{-2x}\sin(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) - \underbrace{\int e^{-2x}\cos(2x)\,dx}_{=I}
\end{aligned}
$$

$$u_2'(x) = \sin(2x) \Rightarrow u_2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$v_2(x) = e^{-2x} \Rightarrow v_2'(x) = -2e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow 2I = \frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{I = \frac{1}{4}e^{-2x}(\sin(2x) - \cos(2x)) + k\,,\ k \in \mathbb{R}}}$$

**Exercice 5 : (2 + 4 = 6 points)**

Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto .\frac{2\ln(x)+1}{2\ln(x)-1}$

1) Déterminez le domaine de définition de $f$ .

C.E. (1) $x > 0$

(2) $2\ln(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq e^{\frac{1}{2}}$

$$dom\ f = ]1; +\infty[\ \backslash \left\{e^{\frac{1}{2}}\right\}$$

2) Calculez $f'(x)$ puis une équation de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'intersection de $C_f$ avec l'axe des abscisses.

Intersections avec l'axe $(Ox)$ :

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\ln(x) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Coordonnées du point d'intersection $I\left(e^{-\frac{1}{2}}\,; 0\right)$.

Fonction dérivée :

$dom\ f' = dom\ f$

$\forall x \in dom\ f'$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{2}{x}(2\ln(x)-1) - \frac{2}{x}(2\ln(x)+1)}{(2\ln(x)-1)^2} \\
&= -\frac{4}{x(2\ln(x)-1)^2}
\end{aligned}
$$

Équation de la tangente au point $I$ :

$$t \equiv y = f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x - e^{-\frac{1}{2}}\right) + f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)+1}{2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)-1} = 0$$

$$f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{4}{e^{-\frac{1}{2}}\left(2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)-1\right)^2} = -e^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$t \equiv y = -e^{\frac{1}{2}}\left(x - e^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{t \equiv y = -\sqrt{e}x + 1}}$$

**Exercice 6 : (6 points)**

Calculez, dans un repère orthonormé du plan, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par les graphes des fonctions $f$ et $g$ définies par :

$f: x \mapsto -2x - 1$ et $g: x \mapsto -x^3 + 3x^2 + 8x - 1$.

Abscisses des points d'intersection :

$$\begin{aligned}
& f(x) = g(x) \\
\Leftrightarrow\ & -2x - 1 = -x^3 + 3x^2 + 8x - 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 - 3x^2 - 10x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x^2 - 3x - 10) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x-5)(x+2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ ou } x = 5 \text{ ou } x = -2
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left|\int_{-2}^{0}\big(f(x) - g(x)\big)dx\right| + \left|\int_{0}^{5}\big(f(x) - g(x)\big)dx\right| \\
&= \left|\int_{-2}^{0}(x^3 - 3x^2 - 10x)dx\right| + \left|\int_{0}^{5}(x^3 - 3x^2 - 10x)dx\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2\right]_{0}^{5}\right| \\
&= |-(4 + 8 - 20)| + \left|\frac{625}{4} - 125 - 125\right| \\
&= 8 + \frac{375}{4} \\
&= \underline{\boldsymbol{\frac{407}{4}\ \mathbf{u.a.}}}
\end{aligned}$$