Théorie : (2p + 2p = 4p)

1) Si a et b sont des réels strictement positifs distincts de 1, alors, pour tout réel strictement positif x,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Voir livre EM66 pg 56

Soit $\log_a x = y$ et $\log_b x = z$. On en déduit : $x = a^y$ et $x = b^z$

Mais alors, $\log_b x = \log_b a^y$
$= y \log_b a$
$= \log_a x \cdot \log_b a$

Finalement, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

2) Si a est un réel strictement positif distinct de 1, alors, pour tout réel strictement positif x,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Voir livre EM66 pg 56

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' \\ &= \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \cdot \ln a}\end{aligned}$$

Exercice 1: (4+5 = 9 points)

Résolvez les inéquations suivantes :

1) $-4 + 2^{x+\log_2(5)} \geq 2^{2x}$

$D_E = \mathbb{R}$

$\forall x \epsilon D_E, -4 + 2^{x+\log_2(5)} \geq 2^{2x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$ posons : $y = 2^x$

$\Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 \leq 0$

racines de $y^2 - 5y + 4$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 > 0$

$y = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow y = 4$ ou $y = 1$

$y^2 - 5y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 4 \Leftrightarrow \log_2(1) \leq x \leq \log_2(4) \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

$S = [0; 2]$

2) $\ln(5 - 3x) - \ln(3) \geq \ln(1 - x) - \ln(x + 1)$

$C.E.$: 1) $5 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$
2) $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
3) $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$D_E =]-1; 1[$

$\forall x \in D_E,\ \ln(5 - 3x) - \ln(3) \geq \ln(1 - x) - \ln(x + 1)$

$\Leftrightarrow \ln(5 - 3x) + \ln(x + 1) \geq \ln(1 - x) + \ln(3)$

$\Leftrightarrow \ln\big((5 - 3x) \cdot (x + 1)\big) \geq \ln\big((1 - x) \cdot 3\big)$

$\overset{\text{bij str} \nearrow}{\Leftrightarrow} (5 - 3x) \cdot (x + 1) \geq (1 - x) \cdot 3$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 5 \geq 3 - 3x$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 5x + 2 \geq 0$

calcul des racines : $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 49 > 0$

$x = \frac{-5\pm7}{-6} \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \qquad S =]-1;1[\cap \left[-\frac{1}{3};2\right] = \left[-\frac{1}{3};1\right[$

Exercice 2: (3+4 = 7 points)

Calculez les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\log_2(e^{2x}-1)}^{\to+\infty}}{\underbrace{2x}_{\to+\infty}}$ f.i. : "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{2x}\cdot 2}{(e^{2x}-1)\cdot\ln(2)}}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)\cdot\ln(2)}$ f.i. : "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2\cdot\ln(2)} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{\ln(2)}}}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right)^3 \cdot \left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-8}\right]$

(posons $y = x + 2$)

$= \lim\limits_{y\to+\infty} \left[\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^3 \cdot \left(1+\frac{1}{y}\right)^{-8}\right] = e^3 \cdot 1^{-8} = \underline{\boldsymbol{e^3}}$

Exercice 3: (0,5+4,5+2+4+3 = 14 points)

On donne $g: x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 5)e^x + 1$

i) Domaine :

$dom\ g = \mathbb{R}$

ii) Limites :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\underbrace{(x^2 - 4x + 5)e^x}_{\to 0^+} + 1\right) = 1$

C_f admet une **A.H. d'équation $y = 1$ en $-\infty$**

Calcul à part :

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 4x + 5)e^x$ f.i. « $\infty \cdot 0$ »

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+1}{e^{-x}}$ f.i. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{-e^{-x}}$ f.i. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0^+$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\underbrace{(x^2 - 4x + 5)e^x}_{\to+\infty} + 1\right) = +\infty$

donc A.O. possible en $+\infty$

Asymptotes obliques :

<u>Asymptote oblique en $+\infty$</u>

Formules de Cauchy :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 5)e^x + 1}^{\to+\infty}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}$ f.i. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}(2x-4)e^x + \frac{1}{2}(x^2-4x+5)e^x}{1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\overbrace{(x-1)^2}^{\to+\infty}\ \overbrace{e^x}^{\to+\infty} = +\infty$$

donc C_f admet une **B.P. dans la direction (Oy) en $+\infty$.**

iii)Dérivée première et tableau de variations :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(x-1)^2}_{\geq 0}\underbrace{e^x}_{>0} \geq 0$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
g	1	$\nearrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

iv) Dérivée seconde et concavité :

$$g''(x) = \left(\frac{1}{2}(x-1)^2e^x\right)'$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2(x-1)e^x + \frac{1}{2}(x-1)^2e^x$$
$$= (x-1)e^x\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\underbrace{e^x}_{>0}$$

Le signe de $g''(x)$ ne dépend que du signe de $x^2 - 1$.

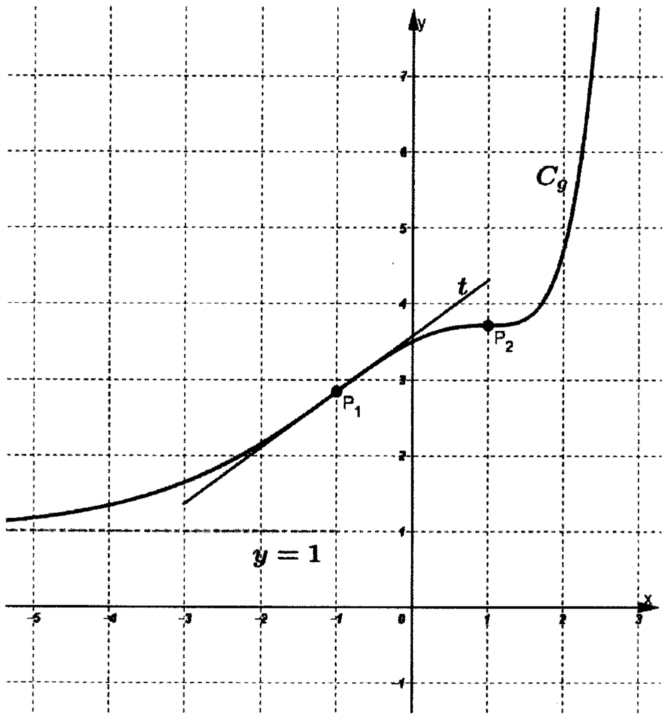
Tableau de concavité :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
C_g		$\cup$	P_1	$\cap$	P_2	$\cup$	

$g(-1) = \frac{5}{e} + 1 \cong 2{,}8$ et $g(1) = e + 1 \cong 3{,}7$

C_g admet deux points d'inflexion $P_1\left(-1; \frac{5}{e} + 1\right)$ et $P_2(1; e + 1)$

Graphe de C_g



Exercice 4: (5+4+5 = 14 points)

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = (4x-1)e^{-4x^2+2x-1}$

Déterminez la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ pour laquelle $F(0) = \frac{3}{2e}$.

$$F(x) = \int (4x-1)e^{-4x^2+2x-1}dx = -\frac{1}{2}\cdot\int(-8x+2)e^{-4x^2+2x-1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot e^{-4x^2+2x-1} + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = \frac{3}{2e} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cdot e^{-1} + k = \frac{3}{2e} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2e} + \frac{1}{2e} \Leftrightarrow k = \frac{2}{e}$$

donc $\underline{\boldsymbol{F(x) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-4x^2+2x-1} + \frac{2}{e}}}$

2) $\int_{-1}^{1} \frac{4x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx = -2\int_{-1}^{1}\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}dx - \int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx$

$$= \left[-4\sqrt{4-x^2} - \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\left(-4\sqrt{4-1} - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(-4\sqrt{4-1} - \text{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \underline{-\frac{\pi}{3}}$$

3) Calculez $\int e^{-4x}\cos(3x)dx$.

$I = \int e^{-4x}\cos(3x)dx = \cos(3x)\cdot\frac{e^{-4x}}{-4} - \int -3\sin(3x)\frac{e^{-4x}}{-4}dx$

$IPP:\ u(x) = \cos(3x) \qquad v(x) = \frac{e^{-4x}}{-4}$

$u'(x) = -3\sin(3x) \qquad v'(x) = e^{-4x}$

$= \frac{-\cos(3x)\cdot e^{-4x}}{4} - \frac{3}{4}\cdot\int \sin(3x)\,e^{-4x}\,dx$

$IPP:\ s(x) = \sin(3x) \qquad t(x) = \frac{e^{-4x}}{-4}$

$s'(x) = 3\cos(3x) \qquad t'(x) = e^{-4x}$

$= \frac{-\cos(3x)\cdot e^{-4x}}{4} - \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{\sin(3x)e^{-4x}}{-4} - \int 3\cos(3x)\cdot\frac{e^{-4x}}{-4}dx\right)$

$= -\frac{1}{4}\cdot\cos(3x)\cdot e^{-4x} + \frac{3}{16}\cdot\sin(3x)\cdot e^{-4x} - \frac{9}{16}\int e^{-4x}\cos(3x)dx$

$= -\frac{1}{4}\cdot\cos(3x)\cdot e^{-4x} + \frac{3}{16}\cdot\sin(3x)\cdot e^{-4x} - \frac{9}{16}\cdot I$

Donc : $\frac{25}{16}I = -\frac{1}{4}\cdot\cos(3x)\cdot e^{-4x} + \frac{3}{16}\cdot\sin(3x)\cdot e^{-4x}$

Finalement :

$I = -\frac{4}{25}\cos(3x)\cdot e^{-4x} + \frac{3}{25}\sin(3x)\cdot e^{-4x} + k,\ k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{I = \frac{1}{25}e^{-4x}(3\sin(3x) - 4\cos(3x)) + k},\ k\in\mathbb{R}$

Exercice 5: (6 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = x - \ln^2(x)$.
Etablissez une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 puis examinez la position relative de cette tangente par rapport à C_f .

C.E. : $x > 0 \quad D_f =]0;+\infty[= D_{f'}$

dérivée :

$\forall x \epsilon D_{f'}: f'(x) = 1 - 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}$

équation de la tangente :

$f(1) = 1 - \ln^2(1) = 1$

$f'(1) = 1 - 2\ln(1)\cdot\frac{1}{1} = 1$

$y = f'(x_0)\cdot x + (f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0) \Leftrightarrow y = x$

position relative de cette tangente par rapport à C_f:

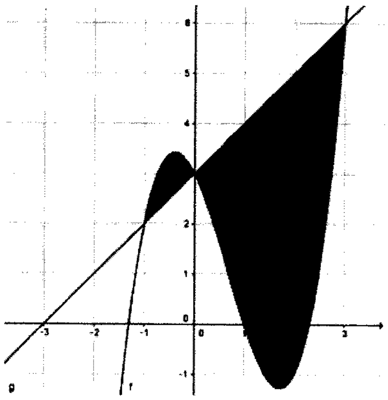
$x - f(x) = x - x + \ln^2(x) = \ln^2(x) \geq 0$

Par conséquent, la tangente t est située au-dessus de C_f sur D_f.

Exercice 6: (6 points)

Calculez, dans un repère orthonormé du plan, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par les graphes des fonctions f et g définies par :
$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = x + 3$

Esquisse :



<u>Calcul des abscisses des points d'intersections :</u>

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = x + 3$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{x^3 - 2x^2 - 3x}_{f(x)-g(x)} = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0$$
avec somme et produit: $P = -3 = -3 \cdot 1$ *et* $S = -2 = -3 + 1$
$$\Leftrightarrow x(x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -1$$

<u>Position de C_f par rapport à C_g :</u>

x	- ∞	-1		0		3	+∞
f(x)-g(x)	-	0	+	0	-	0	+
position	Cf en dessous de Cg		Cf au-dessus de Cg		Cf en dessous de Cg		Cf au-dessus de Cg

<u>Calcul de l'aire :</u>

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{3} (g(x) - f(x))\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - 2x^2 - 3x)\,dx + \int_{0}^{3} (-x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}$$
$$= -\frac{(-1)^4}{4} + \frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + 3 \cdot \frac{(-1)^2}{2} - \frac{3^4}{4} + \frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot \frac{3^2}{2}$$
$$= \underline{\mathbf{\frac{71}{6}\ u.a.}}$$

Ou

$$\mathcal{A} = \left|\int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{0}^{3} (f(x) - g(x))\,dx\right|$$