Corrigé C&D_MATH2_QE...

Question 1 (4+(6+4)=14 points)

(1) Question de cours, voir livre EM66 page 67 **4**

(2) (a) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}\geq\log_2\frac{1}{(x+3)^2}\qquad (I)$

C.E. : 1) $2-x>0\Leftrightarrow x<2$
2) $x+4>0\Leftrightarrow x>-4$
3) $(x+3)^2>0\Leftrightarrow(x+3)^2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -3$

$D=]-4\,;-3[\,\cup\,]-3\,;2[$

$$(\forall x\in D)\quad (I)\Leftrightarrow \frac{\log_2(2-x)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)}-\frac{\log_2\sqrt{x+4}}{\log_2\left(\sqrt{2}\right)}\geq\log_2(x+3)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(2-x)-2\log_2\sqrt{x+4}\geq-\log_2(x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2-x)+\log_2(x+4)\leq\log_2(x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2-x)(x+4)\leq\log_2(x+3)^2$$

$$\overset{bij\,\nearrow}{\Leftrightarrow}(2-x)(x+4)\leq(x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+8x+1\geq 0$$

Posons : $2x^2+8x+1=0$ $\qquad\Delta=56$

$$x=\frac{-8\pm2\sqrt{14}}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{-4+\sqrt{14}}{2}\approx-0{,}13\\ \frac{-4-\sqrt{14}}{2}\approx-3{,}87\end{array}\right.$$

x	-4		$\frac{-4-\sqrt{14}}{2}$		-3		$\frac{-4+\sqrt{14}}{2}$		2
$2x^2+8x+1$	+	+	0	-	-	-	0	+	+

$$S_{\mathbb{R}}=\left]-4\,;\frac{-4-\sqrt{14}}{2}\right]\cup\left[\frac{-4+\sqrt{14}}{2}\,;2\right[$$

6

(b) $9+10\cdot 5^{-1-x} = 5^{x+1}$ $\qquad D=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 9+10\cdot\frac{1}{5}\cdot 5^{-x} = 5\cdot 5^{x} \quad \Big| \cdot 5^{x} \neq 0$

$\Leftrightarrow 9\cdot 5^{x}+2-5\cdot 5^{2x}=0$

$\Leftrightarrow 5\cdot 5^{2x}-9\cdot 5^{x}-2=0$

Posons : $5^{x}=u$, donc $u>0$

L'équation s'écrit :

$5u^2-9u-2=0 \qquad \Delta=121 \qquad u=\frac{9\pm 11}{10}=\left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{1}{5} \text{ à écarter} \end{array}\right.$

$u=2 \Leftrightarrow 5^{x}=2$

$\Leftrightarrow 5^{x}=5^{\log_5 2}$

$\overset{bij \nearrow}{\Leftrightarrow} x=\log_5 2$ $\qquad \boxed{S_{\mathbb{R}}=\{\log_5 2\}}$ $\qquad \boxed{4}$

Question 2 (3+(4+4)+4+(3+3)=21 points)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{2x}}$ (f.i. "1^{∞}") $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{2x}\ln(1-2x)} = e^{-1}=\frac{1}{e}$

Car : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln(1-2x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\boxed{\ln(1-2x)}\to 0}{\boxed{2x}\to 0}$

$\overset{\boxed{H}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2}{2(1-2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{1-2x}$ $\qquad \boxed{3}$

$=-1$

(2) (a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{3x+1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=\int_0^3\left(\frac{3x}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\right)dx$

$\displaystyle=-\frac{3}{2}\int_0^3\frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx+\int_0^3\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx$

$$=-\frac{3}{2}\left[2\sqrt{9-x^2}\right]_0^3+\left[\text{Arcsin}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^3$$

$$=-\frac{3}{2}(0-6)+\text{Arcsin}\,1-\text{Arcsin}\,0$$ 4

$$=9+\frac{\pi}{2}$$

(b) $\displaystyle\int_2^{2e}\left(1+x^2\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right)dx \quad i.p.p$

Posons : $u(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ $\quad v'(x)=1+x^2$

$u'(x)=\frac{1}{x}$ $\quad v(x)=x+\frac{1}{3}x^3$

$$=\left[\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^{2e}-\int_2^{2e}\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)dx$$

$$=\left[\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^{2e}-\int_2^{2e}\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)dx$$

$$=\left[\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right)-x-\frac{1}{9}x^3\right]_2^{2e}$$ 4

$$=\left(2e+\frac{8}{3}e^3\right)\ln e-2e-\frac{8}{9}e^3-\left(2+\frac{8}{3}\right)\ln 1+2+\frac{8}{9}$$

$$=\frac{26}{9}+\frac{16}{9}e^3$$

(3) $f(x)=\sin(2x)\cdot\cos^2 x$

$$F(x)=\int\sin(2x)\cdot\cos^2 x\,dx$$

$$=\int 2\sin x\cdot\cos^3 x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cos^4 x+c\quad,\ c\in\mathbb{R}$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right)+c=\frac{1}{8}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+c=\frac{1}{8}\Leftrightarrow c=\frac{1}{4}$$

La primitive à déterminer est : $F_{\frac{1}{4}}:x\mapsto-\frac{1}{2}\cos^4 x+\frac{1}{4}$ 4

(4) (a) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ $\quad dom\ f=\mathbb{R}$ $\quad (\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)\geq 0$

$g(x)=2\sqrt{x}$ $\quad dom\, g=\mathbb{R}_+$ $\quad (\forall x\in\mathbb{R}_+)\ g(x)\geq 0$

$$(\forall x\in\mathbb{R}_+)\qquad f(x)\geq g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2\geq 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2}_{\geq 0}\geq \underbrace{8\sqrt{x}}_{\geq 0}\quad \big|\ \text{élever au carré}$$

$$\Leftrightarrow x^4\geq 64x$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\left(x^3-64\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot(x-4)\cdot\underbrace{\left(x^2+4x+16\right)}_{>0,\ \text{car }\Delta=-48<0}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot(x-4)\geq 0$$

x	0		4		$+\infty$
$f(x)-g(x)$	0	$-$	0	$+$	
	$\vert$	G_g / G_f	$\vert$	G_f / G_g	

3

(b) On a : $(\forall x\in[0\,;4])\qquad g(x)\geq f(x)\geq 0$

$$V=\pi\cdot\int_0^4\left(\left[g(x)\right]^2-\left[f(x)\right]^2\right)dx$$

$$=\pi\cdot\int_0^4\left(\left[2\sqrt{x}\right]^2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]^2\right)dx$$

$$=\pi\cdot\int_0^4\left(4x-\frac{1}{16}x^4\right)dx$$

$$=\pi\cdot\left[2x^2-\frac{1}{80}x^5\right]_0^4$$

$$=\pi\cdot\left(32-\frac{1}{80}\cdot 1024\right)$$

$$=\frac{96}{5}\pi\quad u.v.\qquad\qquad (\approx 60{,}32\ u.v.)$$

3

Question 3 (13+4+8=25 points)

$f(x)=(2x+1)^2\cdot e^{-x}$

(1) $dom\, f=\mathbb{R}=dom_c f$ $\boxed{1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{(2x+1)^2}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}=+\infty$ donc pas d'AHG $\boxed{1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{x}_{\to-\infty}\cdot\underbrace{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2}_{\to4}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}=-\infty$ donc pas d'AOG

mais BP dans la direction de (Oy) $\boxed{1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{(2x+1)^2}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\to0}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\boxed{(2x+1)^2}\to+\infty}{\boxed{e^x}\to+\infty}\overset{\boxed{H}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\boxed{4(2x+1)}\to+\infty}{\boxed{e^x}\to+\infty}$

$\overset{\boxed{H}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x}$

$=0$

donc AHD : $y=0$ $\boxed{2}$

$dom\, f'=\mathbb{R}$ $\boxed{0,5}$

$f'(x)=4(2x+1)\cdot e^{-x}-(2x+1)^2e^{-x}$

$=(2x+1)\cdot(3-2x)\cdot e^{-x}$ $\boxed{1}$

$\left(=(-4x^2+4x+3)\cdot e^{-x}\right)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow(2x+1)\cdot(3-2x)\cdot\underbrace{e^{-x}}_{>0}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\ \vee\ x=\frac{3}{2}$

$dom\, f''=\mathbb{R}$ $\boxed{0,5}$

$f''(x)=(-8x+4)\cdot e^{-x}-(-4x^2+4x+3)\cdot e^{-x}=(4x^2-12x+1)\cdot e^{-x}$ $\boxed{1}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow(4x^2-12x+1)\cdot\underbrace{e^{-x}}_{>0}=0\Leftrightarrow 4x^2-12x+1=0$ $\Delta=128$

$$x=\frac{12\pm8\sqrt{2}}{8}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\approx2,9\\ \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\approx0,1\end{array}\right.$$ $\boxed{1}$

Tableau récapitulatif

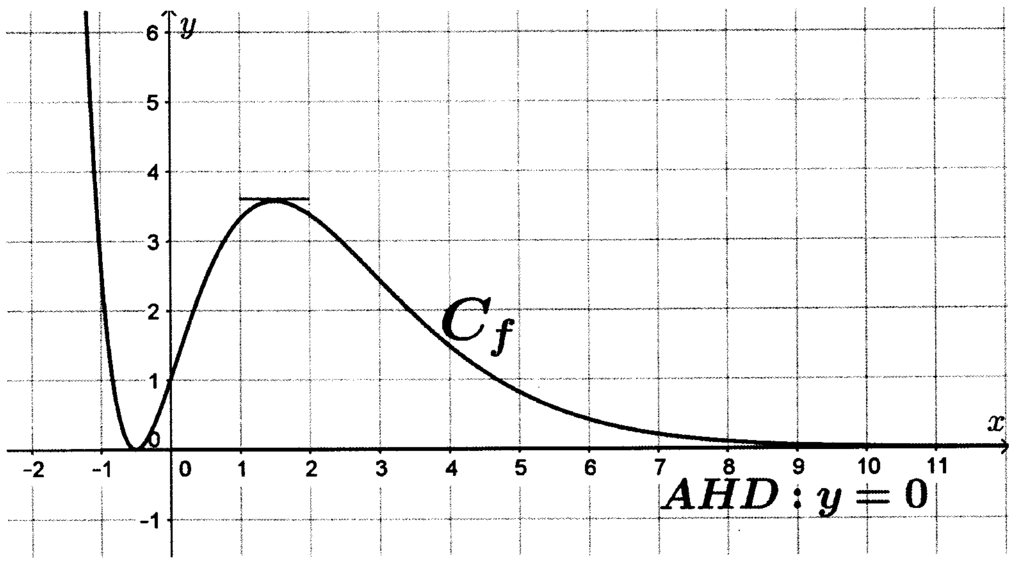
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\approx 1,3$	$\nearrow$	$\frac{16}{e\sqrt{e}} \approx 3,6$ Max	$\searrow$	$\approx 2,5$	$\searrow$	0
C_f	$BPdir(Oy)$	$\cup$			PI	$\cap$			PI	$\cup$	$AHD : y = 0$

4

(2) Tableau de valeurs

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5
$f(x)$	2,7	0	1	3,3	3,6	3,4	2,4	1,5	0,8

Représentation graphique



4

(3) (a) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \geq 0$

Donc $A(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx$

Soit $I=\int f(x)dx=\int (2x+1)^2\cdot e^{-x}\,dx$ $\qquad$ *ipp*

$$u(x)=(2x+1)^2 \qquad v'(x)=e^{-x}$$
$$u'(x)=4\cdot(2x+1) \qquad v(x)=-e^{-x}$$

$I=-(2x+1)^2\cdot e^{-x}+4\int (2x+1)\cdot e^{-x}\,dx$ $\qquad$ *ipp*

$$u(x)=2x+1 \qquad v'(x)=e^{-x}$$
$$u'(x)=2 \qquad v(x)=-e^{-x}$$

$$I=-(2x+1)^2\cdot e^{-x}-4\cdot(2x+1)\cdot e^{-x}+8\int e^{-x}dx$$
$$=-(2x+1)^2\cdot e^{-x}-4\cdot(2x+1)\cdot e^{-x}-8\cdot e^{-x}+c$$
$$=\left(-4x^2-12x-13\right)\cdot e^{-x}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

$$A(\lambda)=\left[\left(-4x^2-12\lambda-13\right)\cdot e^{-x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}=\left(-4\lambda^2-12\lambda-13\right)\cdot e^{-\lambda}+(1-6+3)\cdot e^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(-4\lambda^2-12\lambda-13\right)\cdot e^{-\lambda}+8\sqrt{e}$$ 6

(b) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\left(-4\lambda^2-12\lambda-13\right)\cdot e^{-\lambda}+8\sqrt{e}\right]$

or $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\underbrace{\left(-4\lambda^2-12\lambda-13\right)}_{\to-\infty}\cdot\underbrace{e^{-\lambda}}_{\to 0}=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\dfrac{\boxed{\left(-4\lambda^2-12\lambda-13\right)}\to-\infty}{\boxed{e^{\lambda}}\to+\infty}$

$$\overset{\boxed{H}}{=}\lim_{\to+\infty}\frac{\boxed{-8\lambda-12}\to-\infty}{\boxed{e^{\lambda}}\to+\infty}$$

$$\overset{\boxed{H}}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{-8}{e^{\lambda}}$$
$$=0$$

donc $\boxed{A(\lambda)=8\sqrt{e}\ u.a.\ \left(cm^2\right)}$ 2