Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2015

Sections: C et D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Repêchage

Exercice 1 (3 points)

Démontrer que $(\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}), (\forall x \in \mathbb{R}_+^*), (\forall r \in \mathbb{R})$: $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

Exercice 2 (5+4+2+2+2+3+5+5=28 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 5(x+3) \cdot e^{-2-x}$

1) Déterminer le domaine de définition de f, calculer les limites aux bornes de ce domaine et étudier l'existence d'asymptotes.
2) Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f.
3) Établir le tableau de variation de f.
4) Déterminer les coordonnées (valeurs exactes) des extremums et des points d'inflexion éventuels.
5) Déterminer les coordonnées (valeurs exactes) des points d'intersection du graphe cartésien de f avec les axes.
6) Représenter f graphiquement dans un repère orthonormé (unité : $1\ cm$).
7) Établir une équation de la tangente t au graphe de f passant par le point $P(1;0)$. Déterminer ensuite les coordonnées (valeurs exactes) du point de contact de t avec le graphe de f et tracer la tangente t.
8) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par le graphe de f, l'axe des x et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

   Calculer ensuite : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Exercice 3 (4+9=13 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et préciser à chaque fois l'ensemble des solutions :

1) $2^{1-x} + 6 \cdot 2^x > 8$
2) $3 \cdot \log_9\left(\frac{x}{2} - 1\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \cdot \log_{27}(x-2) - \log_3(2)$

Exercice 4 (4+4=8 points)

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{3x-1}$.
2) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité, les limites aux bornes du domaine et la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{4x-1}$.

Exercice 5 (5+3=8 points)

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{-x+3}{\sqrt{9-4x^2}}$

   a) Déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$.

   b) Déterminer l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ pour $x = 0$.

2) Calculer : $\displaystyle\int_a^b \sin(2x)\cdot\cos(4x)\,dx$ où $a = \frac{\pi}{6}$ et $b = \frac{\pi}{2}$.