LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 2	**B**	*Durée de l'épreuve :* *4h20* *Date de l'épreuve :* *25 mai 2020*

Numéro du candidat : ______________________________

Instructions

- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement une question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seules les réponses correspondant à la question choisie par l'élève seront évaluées. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix clairement renseigné sur la page de garde, la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (48 points)

Question 1	16 points
Question 2	16 points
Question 3	6 points
Question 4	10 points

Partie au choix (12 points)

☐	Question 5 :	Calcul intégral	12 points
☐	Question 6 :	Fonctions avec paramètre	12 points
☐	Question 7 :	Calcul d'aire	12 points

Partie obligatoire (48 points)

Question 1 (1,5+4+3,5+3,5+1,5+2=16 points)

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=\begin{cases} x-\ln\dfrac{x+4}{2x+4} & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{5}{4}x-e^{-\frac{2}{x}} & \text{si } x>0 \end{cases}$

Soit C_f la courbe représentative de *f*.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction *f* et étudier la continuité de *f* en 0.
b) Étudier le comportement asymptotique de *f*.
c) Calculer $f'(x)$ et préciser le domaine de dérivabilité de *f*.
d) Dresser le tableau des variations de *f*.
Suggestion : Pour déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$, faire une étude des variations de la fonction *g* définie par $g(x)=\dfrac{5}{4}-\dfrac{2}{x^2\cdot e^{\frac{2}{x}}}$.
e) Déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point d'inflexion *I* de *f* d'abscisse <u>positive</u> et l'équation de la tangente à C_f en *I*.
f) Représenter C_f et ses asymptotes dans un repère orthonormé (unité : 1 *cm*).

Question 2 (5+7+4=16 points)

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\log_6 e\cdot\ln\left(e^x-1\right)=1-x\cdot\log_6 e$
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4^x-e\cdot 2^{1-x}\le(3+e)\cdot 2^x-2-3e$
c) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+Arc\sin x\right)^{\ln x}$

Question 3 (2+2,5+1,5=6 points)

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=x^{\ln(\ln x)}$ et on note C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer le domaine de définition de *f* et calculer les limites aux bornes du domaine.
b) Déterminer le domaine de définition de la fonction dérivée, calculer la fonction dérivée et résoudre l'équation $f'(x)=0$.
c) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse e^e.

Question 4 ((1+5)+4=10 points)

a) i) Calculer : $\displaystyle\int\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

ii) Calculer la primitive de la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$ qui s'annule pour $x=1$.

Indication : déterminer des réels *a* et *b* tels que $\forall x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{a}{1+x^2}+\dfrac{bx^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

b) Calculer : $\displaystyle\int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+2}dx$.

Partie au choix (12 points)

Question 5 (5+5+2=12 points)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{e}^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{1-\sin x} dx$

c) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$

Question 6 (4+4+4=12 points)

Soit $f_m(x) = x + m \cdot e^{-x}$ (avec m paramètre réel non nul) et soit C_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

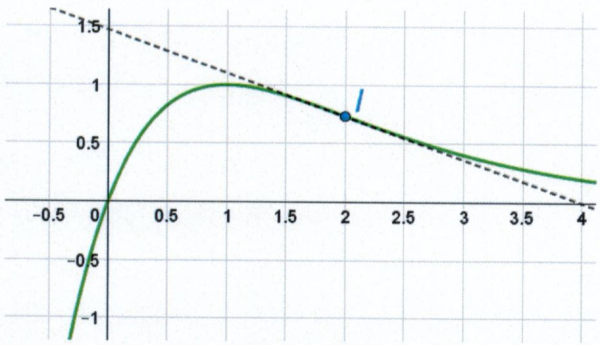
a) Déterminer le domaine de définition de f_m et étudier le comportement asymptotique de f_m.

b) Calculer la dérivée première de f_m et ses racines éventuelles. Discuter, en fonction de m, les variations de f_m.

c) Montrer qu'à chaque courbe C_{f_m}, on peut tracer une tangente t_m passant par l'origine du repère. Déterminer les coordonnées du point de contact ainsi qu'une équation de t_m.

Question 7 (5+7=12 points)

a) On considère la fonction f définie par $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ dont voici la représentation graphique :



Calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par l'axe des ordonnées, la courbe représentative de f et la tangente au point d'inflexion I. La position de la tangente par rapport à la courbe représentative peut être lue sur le graphique.

b) On considère l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ainsi que la droite $d \equiv y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + 1$.

Représenter E et d et noter S la partie du plan délimitée par E et d et qui ne contient pas l'origine du repère. Calculer l'aire de la partie S.