LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES
2018

BRANCHE	SECTION	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques II	**B**	*Durée de l'épreuve : 4 heures*
		Date de l'épreuve : 19 septembre 2018

Question 1 — 22 (=5+(3+4+2)+3+2+3) points

Soit la fonction :

$$f_m : x \mapsto x - \frac{m}{x} - (m+1)\ln x$$

où m est un paramètre réel ***strictement positif*** et soit $\mathcal{G}_m$ son graphe. On discutera en fonction du paramètre m si nécessaire.

(1) a) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f_m.
b) Déterminer, s'il y en a, les asymptotes et branches paraboliques de $\mathcal{G}_m$.

(2) a) Calculer la dérivée f_m' et en déterminer les racines.
b) Dresser le tableau des variations de f_m. (***Indication*** : il y a 3 cas.) Préciser dans chaque cas la nature du point d'abscisse 1 de $\mathcal{G}_m$.
c) En déduire le nombre de racines de f_m. ***Indication*** : considérer le signe de $f_m(1)$.

(3) Déterminer la concavité de $\mathcal{G}_m$. On demande de préciser les abscisses (mais pas les ordonnées) des points d'inflexion éventuels.

(4) Représenter graphiquement f_3 (avec précision !) dans un repère orthonormé (unité = 1 cm) en indiquant les coordonnées des points d'inflexion éventuels de $\mathcal{G}_3$.

(5) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{G}_3$, la tangente t à $\mathcal{G}_3$ au point d'abscisse 1 et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$ respectivement. (On demande la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} de cette aire.)

Question 2 — 10 (=1,5+2,5+1+3+2) points

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(1) Etudier la continuité de f en 0 et en déduire le domaine de continuité de f.

(2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat. Préciser le domaine de dérivabilité de f.

(3) Etudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

(4) Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau des variations de la fonction.

(5) Déterminer en fonction du paramètre réel a le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

Question 3 — 10 (=5+5) points

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(1) $\log_{\frac{1}{2}}\left|5\cdot 2^x-3\right|\geq -2x-1$

(2) $\log_{\frac{25}{4}}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\log_{\frac{2}{5}}\left(x-1\right)=\dfrac{1}{2}$

Question 4 — 12 (3,5+8,5) points

(1) Soit le polynôme $p: x\mapsto (x-1)(x-2)^4$. On note $\mathcal{G}$ le graphe de p dans un repère orthonormé du plan. Etudier le signe de $p(x)$, puis calculer l'aire (valeur exacte) de la partie du plan délimitée par $\mathcal{G}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=3$ respectivement.

(2) Dans un repère orthonormé du plan on considère :

- le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon 2 ;
- la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x^2+\dfrac{1}{2}$.

On note S la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ et contenant le point $(0,1)$.

a) Faire une figure et déterminer algébriquement les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

b) Calculer le volume (valeur exacte) du solide de révolution engendré par la rotation de S autour de l'axe des abscisses.

Question 5 — 6 (3+3) points

(1) Calculer $\int (x+1)\operatorname{Arctan}(2x)\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

(2) Calculer $\int \dfrac{1}{\cos^2 x\cdot\sin x}\,\mathrm{d}x$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. (***Indication*** : commencer par une intégration par parties.)