LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES 2017

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 2	B	*Durée de l'épreuve* 4 heures
		Date de l'épreuve 24. 05. 2017
		Numéro du candidat

I. a) On donne la fonction $g : x \longmapsto x^2 - 2\ln x$.

i. Déterminer la fonction dérivée de g et étudier le sens de variation de g.

ii. En déduire le signe de g.

b) On donne la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1+\ln x}{x} + \dfrac{x}{2}$.

i. Etudier les variations de f [domaine de définition, limites et branches infinies, dérivée première, signe de la dérivée (on peut utilement se servir du signe de g étudié sous a)), tableau de variation, dérivée seconde et concavité, courbe représentative].

ii. Déterminer, si possible, le(s) point(s) de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ qui admet(tent) une tangente parallèle à la droite $\Delta : y = \dfrac{x}{2}$.
Etablir, dans chaque cas, une équation cartésienne et tracer la tangente.

iii. Déterminer le point d'intersection de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\Delta : y = \dfrac{x}{2}$.
Calculer l'aire du domaine D_λ délimité par $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et la droite d'équation $x = \lambda$ où $\lambda > 1$.
Déterminer la valeur de λ pour que l'aire de D_λ soit égale à 2 unités d'aire.

[(2+1)+(7+2+4)=16 points]

II. On donne $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{x-1} & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ b + a\ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

a) Déterminer les valeurs des paramètres réels a et b pour que la fonction f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) On prend $a = 1$ et $b = 1$.

i. Esquisser le graphe de la fonction f .

ii. Calculer l'aire de la partie D du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = e$;

iii. Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie D.

[4+(2+3+5)=14 points]

III. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x

$$(m+2)\,3^{x}+(2m+3)\,3^{-x}-2m=0$$

où m est un paramètre réel.

b) Résoudre :

i. $(\log_3 x)^2 = 2\log_3 19683 + \log_3 (x^3)$

ii. $\ln(2e^{x}-5) > \ln(13e^{-x}-30e^{-2x})$.

[6+(3+5)=14 points]

IV. a) On donne la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1-2\ln x - 2\ln^2 x}{x^2}$.

Trouver, si elles existent, les abscisses des points de la courbe représentative de f qui admettent une tangente passant par l'origine du repère.

b) Calculer :

i. $\displaystyle\int_1^{\pi} \sin(\ln x)\, dx$

ii. $\displaystyle\int_0^{1} x\,(1-x)^{2017}\, dx$

c) On donne les fonctions

$$\begin{aligned} f &: x \longmapsto 2-x^2 \\ g &: x \longmapsto x^2 \,. \end{aligned}$$

Construire, dans un même repère orthonormé du plan, les représentations graphiques de f et de g .

Déterminer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des ordonnées de l'ensemble des points

$$D = \{M(x;y) \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\} \;.$$

[5+(4+3)+4=16 points]