Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2015 **Section: B** **Branche: Mathématiques 2**	**Numéro d'ordre du candidat** ________________

Exercice 1 **(4 points)**

Démontrer que: Si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors

1) la fonction $F: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$ est dérivable sur $[a;b]$;

2) la dérivée de F est f.

Autrement dit, la fonction F est une primitive de f.

Exercice 2 **(3+3=6 points)**

Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes:

(a) $x^{|x-1|} = \sqrt{x^{\frac{1}{x}}}$

(b) $\log_{\frac{1}{3}}(1-3^{x+1}) \geqslant -2x$

Exercice 3 **(1+6+8+1+2=18 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1-\ln(e^{-x}+e-1) & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ (x^2+x)\cdot e^{1-x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

(a) Etudier la continuité de f en 0.

(b) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de f.
Etudier la position de la courbe par rapport à son asymptote en $-\infty$ sur $]-\infty;0[$.

(c) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat trouvé.
Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

(d) Donner une équation de la tangente t_1 à C_f au point d'abscisse 1.

(e) Tracer la courbe C_f, t_1 et les demi-tangentes éventuelles. (Repère orthonormé, unité: 1 cm)

Exercice 4 **(4+4=8 points)**

(a) Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin 2x \cdot \ln(1 - \sin 2x)$.
Déterminer la primitive F de f qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{2}$ sur un intervalle I à déterminer.

(b) Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{3}{2 + \cos 4x}\, dx$

Exercice 5 **((1+2+1)+(5+2+1+5)=17 points)**

(A) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - e^{-2x}(2x-1)^2$.

(a) Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition.

(b) Dresser le tableau de variation de g.

(c) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

(B) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3 + e^{-2x}(4x^2 + 1)$ et C_f sa courbe représentative.

(a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de f.

(b) Calculer la dérivée de f et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
Dresser le tableau de variation de f.

(c) Représenter graphiquement la fonction f.

(d) Soit λ un réel strictement positif.
Calculer l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par C_f, l'asymptote oblique et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda$.

Exercice 6 **(7 points)**

On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^{2x}$.
Tracer les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions f et g.
Déterminer le volume du solide obtenu en faisant tourner la surface fermée délimitée par C_f, C_g et la droite d d'équation $x = 1$ autour de l'axe (Oy).