CORRIGÉ

Exercice 1 (4 points)

livre page 86

Exercice 2 (3+3=6 points)

(a) $x^{|x-1|} = \sqrt{x}^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow e^{|x-1|\ln x} = e^{\frac{1}{x}\ln\sqrt{x}} \qquad (E)$

C.E.: $x > 0$ et $x \neq 0$ et $x > 0$

$D =]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}
\forall x \in D,\ (E) &\Leftrightarrow |x-1|\ln x = \tfrac{1}{x}\ln\sqrt{x} \\
&\Leftrightarrow |x-1|\ln x - \tfrac{1}{2x}\ln x = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln x\big(|x-1| - \tfrac{1}{2x}\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \underbrace{1}_{\in D} \text{ ou } \underbrace{|x-1| = \tfrac{1}{2x}}_{(*)}
\end{aligned}$$

Si $x \geqslant 1$: $(*) \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 12$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \in [1; +\infty[\qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \notin [1; +\infty[$

Si $0 < x < 1$: $(*) \Leftrightarrow 1 - x = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow -2x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = -4 < 0$

$S = \{1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\}$

(b) C.E.: $1 - 3^{x+1} > 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} < 1 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

$D =]-\infty; -1[$

$$\begin{aligned}
\forall x \in D, \quad & \log_{\frac{1}{3}}(1 - 3^{x+1}) \geqslant -2x \qquad |\exp_{\frac{1}{3}}, \text{bijection strictement décroissante} \\
\Leftrightarrow\ & 1 - 3^{x+1} \leqslant \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-2x} \\
\Leftrightarrow\ & 1 - 3^{x+1} \leqslant 3^{2x} \\
\Leftrightarrow\ & 3^{2x} + 3\cdot 3^x - 1 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Posons $y = 3^x$ avec $y > 0$

$y^2 + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ou $y = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

Donc, $y^2 + 3y - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow y \geqslant \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ou $y \leqslant \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

Par suite, $3^{2x} + 3\cdot 3^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3^x \geqslant \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ou $\underbrace{3^x \leqslant \frac{-3-\sqrt{13}}{2}}_{\text{impossible}}$

$\Leftrightarrow x \geqslant \underbrace{\log_3 \frac{\sqrt{13}-3}{2}}_{\simeq -1{,}09}$ car $\exp_3$ est une bijection strictement croissante

$S = \left[\log_3 \frac{\sqrt{13}-3}{2}; -1\right[$

Exercice 3 **(1+6+8+1+2=18 points)**

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{(x^2+x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^{1-x}}_{\to e} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(1 - \ln \underbrace{(e^{-x}+e-1)}_{\to e}\right) = 0$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$. Par suite f est continue en 0.

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(1 - \ln \underbrace{(e^{-x}+e-1)}_{\to +\infty}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\tfrac{\ln(e^{-x}+e-1)}{x}}_{\to -1\ (*)}\right) = 1$

$(*)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\overbrace{\ln(e^{-x}+e-1)}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to -\infty}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}+e-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}(1+\underbrace{e\cdot e^{x}-e^{x}}_{\to 0})} = -1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} [f(x)-x] &= \lim_{x\to -\infty} \left(1 - \ln(e^{-x}+e-1) - x\right)\\
&= \lim_{x\to -\infty} \left(1 - \ln\left[e^{-x}(1+e^{1+x}-e^{x})\right] - x\right)\\
&= \lim_{x\to -\infty} \left(1 + x - \ln(1+e^{1+x}-e^{x}) - x\right)\\
&= \lim_{x\to -\infty} \left(1 - \ln\underbrace{(1+e^{1+x}-e^{x})}_{\to 1}\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

A.O.G.$\equiv y = x+1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+x)\cdot e^{1-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\overbrace{x^2+x}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^{x-1}}_{\to +\infty}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\overbrace{2x+1}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^{x-1}}_{\to +\infty}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{e^{x-1}} = 0$

A.H.D.$\equiv y = 0$

Position courbe-asymptote sur $]-\infty;0[$

$$\begin{aligned}
y_C - y_{A.O.} &= 1 - \ln(e^{-x}+e-1) - (x+1) = -\ln\left[e^{-x}(1+e^{x+1}-e^{x}) - x\right]\\
&= x - \ln(1+e^{x+1}-e^{x}) - x = -\ln(1+e^{x+1}-e^{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_C - y_{A.O.} < 0 &\Leftrightarrow \ln(1+e^{x+1}-e^{x}) > 0\\
&\Leftrightarrow 1+e^{x+1}-e^{x} > 1\\
&\Leftrightarrow \underbrace{e^{x}(e-1) > 0}_{\text{toujours vrai}}
\end{aligned}$$

Donc, $y_C - y_{A.O.} < 0$ et la courbe est en-dessous de son asymptote oblique sur $]-\infty;0[$.

(c) • $\forall x < 0,\quad f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+e-1} = \underbrace{\dfrac{1}{1+(e-1)e^{x}}}_{>0} \quad > 0$

• $\forall x > 0,\quad f'(x) = (2x+1)e^{1-x} - (x^2+x)e^{1-x} = e^{1-x}(-x^2+x+1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin]0;+\infty[$

$f'(x)$ a le même signe que $-x^2+x+1$.

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{e^{1-x}}_{\to e}\underbrace{(x+1)}_{\to 1} = e = f'_d(0)$$

  $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{1-\ln(e^{-x}+e-1)}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+(e-1)\underbrace{e^x}_{\to 1}} = \frac{1}{e} = f'_g(0)$$

  Donc f n'est pas dérivable en 0.

  C_f admet une demi-tangente de pente e à droite au point d'abscisse 0 et une demi-tangente de pente $\frac{1}{e}$ à gauche au point d'abscisse 0. (Point anguleux)

x	$-\infty$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\frac{1}{e}\Vert e$	$+$	0	$-$	

- $\forall x < 0,\qquad f''(x) = \frac{-(e-1)e^x}{[1+(e-1)e^x]^2} < 0$
- $\forall x > 0,\qquad f''(x) = -e^{1-x}(-x^2+x+1) + e^{1-x}(-2x+1) = e^{1-x}(x^2-3x)$

  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\notin]0;+\infty[}$ ou $x = 3$

  $f''(x)$ a le même signe que $x^2 - 3x$.

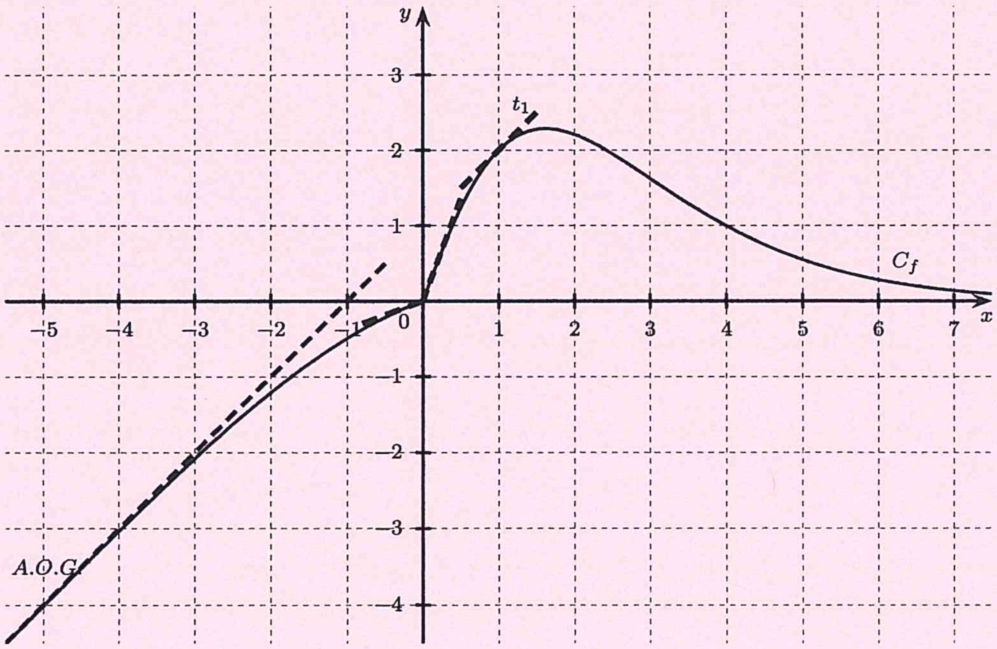
x	$-\infty$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\frac{1}{e}\Vert e$	$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
					Max				
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\simeq 2,3$	$\searrow$	$12e^{-2}$	$\searrow$	
	$-\infty$								0
		$\frown$			$\frown$		*P.I.*	$\smile$	

(d) $t_1 \equiv y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$f(1) = 2$ et $f'(1) = 1$

donc $t_1 \equiv y - 2 = 1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow y = x + 1$

(e)



Exercice 4 **(4+4=8 points)**

(a) C.E.: $1-\sin 2x > 0 \Leftrightarrow \sin 2x < 1 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$F(x) = \int \sin 2x \cdot \ln(1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x \qquad u(x) = \ln(1-\sin 2x) \quad u'(x) = \frac{-2\cos 2x}{1-\sin 2x}$$

$$v'(x) = \sin 2x \qquad v(x) = -\tfrac{1}{2}\cos 2x$$

$$\begin{aligned}
&= -\tfrac{1}{2}\cos 2x \cdot \ln(1-\sin 2x) - \int \frac{\cos^2 2x}{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos 2x \cdot \ln(1-\sin 2x) - \int \frac{1-\sin^2 2x}{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos 2x \cdot \ln(1-\sin 2x) - \int \frac{(1-\sin 2x)(1+\sin 2x)}{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos 2x \cdot \ln(1-\sin 2x) - \int (1+\sin 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos 2x \cdot \ln(1-\sin 2x) - x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\cos\pi \cdot \ln(1-\sin\pi) - \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\pi + k = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 - \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} + k = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad k = \tfrac{3}{2} + \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donc, $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \cdot \ln(1-\sin 2x) - x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}$ sur $I =]\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}[$

(b)
$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{3}{2+\cos 4x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{3}{2+\frac{1-\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{3(1+\tan^2 2x)}{2+2\tan^2 2x+1-\tan^2 2x}\,\mathrm{d}x \\
&= 3\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{1+\tan^2 2x}{3+\tan^2 2x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

posons $t = \tan 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\mathrm{Arc}\tan t$

$x'(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$

si $x = 0$ alors $t = 0$

si $x = -\frac{\pi}{8}$ alors $t = -1$

$$\begin{aligned}
&= 3\int_{-1}^{0} \frac{1+t^2}{3+t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{3}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{3+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{3}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{3(1+\frac{t^2}{3})}\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{2}[\mathrm{Arc}\tan\tfrac{t}{\sqrt{3}}]_{-1}^{0} \\
&= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Arc}\tan(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}) \\
&= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\tfrac{\pi}{6}) \\
&= \tfrac{\pi\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}$$

Exercice 5 **((1+2+1)+(5+2+1+5)=17 points)**

(A) (a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}\underbrace{(2x-1)^2}_{\to+\infty}\right) = 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)^2}{e^{2x}}\\ &\overset{H}{=} 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{4(2x-1)}{2e^{2x}}\\ &\overset{H}{=} 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2e^{2x}}\\ &= 1-0\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\underbrace{e^{-2x}}_{\to+\infty}\underbrace{(2x-1)^2}_{\to+\infty}\right) = -\infty$$

(b) $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2e^{-2x}(2x-1)^2 - e^{-2x}\cdot 4(2x-1)\\ &= 2e^{-2x}(4x^2-4x+1-4x+2)\\ &= \underbrace{2e^{-2x}}_{>0}(4x^2-8x+3)\end{aligned}$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-8x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{1}{2}$ $\qquad(\Delta=16)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$1-4e^{-3}$	$\nearrow$	1

$g(\frac{3}{2}) = 1-4e^{-3} \simeq 0,8 > 0$

(c) $g(0)=1-1=0$

Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, on $g(x)>0$ sur $]0;+\infty[$ et $g(x)<0$ sur $]-\infty;0[$.

(B) (a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{2x-3}_{\to+\infty}+\underbrace{\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}\underbrace{(4x^2+1)}_{\to+\infty}}_{\to 0\,(*)}\Big) = +\infty$

$$(*)\qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-2x}(4x^2+1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1}{e^{2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{2e^{2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{4e^{2x}} = 0$$

$f(x)=2x-3+\varphi(x)$ avec $\varphi(x)=e^{-2x}(4x^2+1)$ et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$

A.O.D. $\equiv y=2x-3$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\Big(\underbrace{2x-3}_{\to-\infty}+\underbrace{e^{-2x}(4x^2+1)}_{\to+\infty}\Big)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\underbrace{e^{-2x}}_{\to+\infty}\Big(\underbrace{\tfrac{2x}{e^{-2x}}}_{\to 0(*)}-\underbrace{\tfrac{3}{e^{-2x}}}_{\to 0}+\underbrace{4x^2}_{\to+\infty}+1\Big) = +\infty\end{aligned}$$

$$(*)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-2e^{-2x}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\underbrace{e^{-2x}}_{\to+\infty}\Big(\underbrace{\tfrac{2}{e^{-2x}}}_{\to 0}-\underbrace{\tfrac{3}{xe^{-2x}}}_{\to 0}+\underbrace{4x}_{\to-\infty}+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}\Big) = -\infty$$

B.P. de direction (Oy)

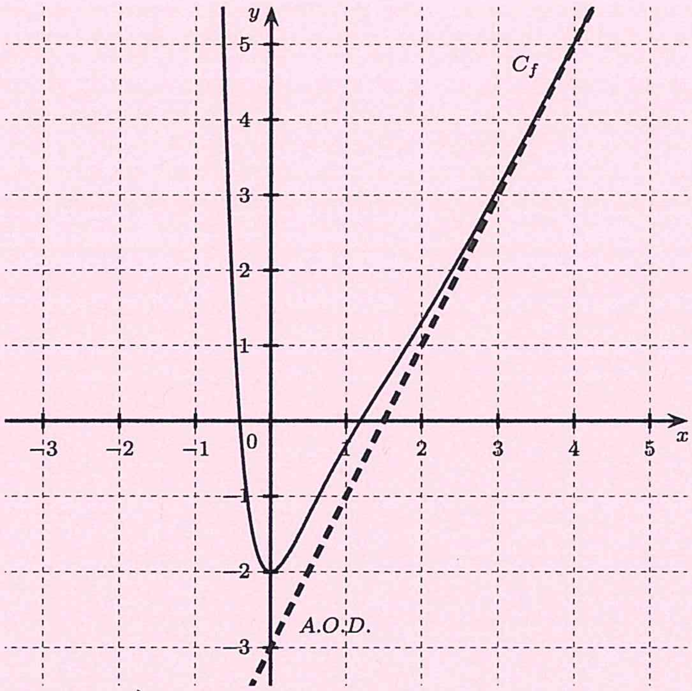
(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2 - 2e^{-2x}(4x^2+1) + e^{-2x} \cdot 8x = 2 - 2e^{-2x}(4x^2+1-4x)$

$= 2[1 - e^{-2x}(2x-1)^2] = 2 \cdot g(x)$

$f'(x)$ a donc le même signe que $g(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

(c)



(d) $A_\lambda = \int_0^\lambda [f(x) - (2x-3)]\,\mathrm{d}x$

$= \int_0^\lambda e^{-2x}(4x^2+1)\,\mathrm{d}x \qquad u(x) = 4x^2+1 \quad u'(x) = 8x$

$\qquad v'(x) = e^{-2x} \quad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(4x^2+1)\right]_0^\lambda + 4\int_0^\lambda xe^{-2x}\,\mathrm{d}x \qquad u(x) = x \quad u'(x) = 1$

$\qquad v'(x) = e^{-2x} \quad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(4x^2+1)\right]_0^\lambda + 4\left(\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^\lambda + \frac{1}{2}\int_0^\lambda e^{-2x}\,\mathrm{d}x\right)$

$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(4x^2+1)\right]_0^\lambda - 2\left[xe^{-2x}\right]_0^\lambda - \left[e^{-2x}\right]_0^\lambda$

$= -\frac{1}{2}e^{-2\lambda}(4\lambda^2+1) + \frac{1}{2} - 2\lambda e^{-2\lambda} - (e^{-2\lambda} - 1)$

$= -2\lambda^2 e^{-2\lambda} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda} + \frac{1}{2} - 2\lambda e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda} + 1$

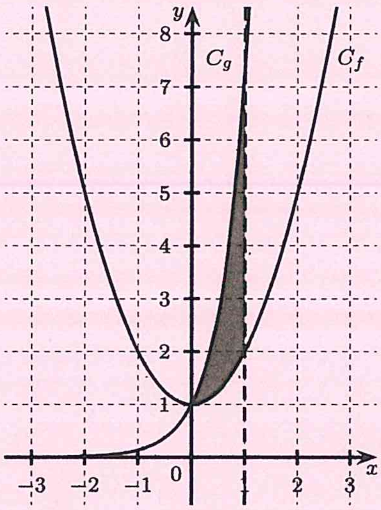
$= \frac{3}{2} - e^{-2\lambda}(2\lambda^2 + 2\lambda + \frac{3}{2})$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{3}{2} - e^{-2\lambda}(2\lambda^2+2\lambda+\frac{3}{2})\right) = \frac{3}{2} - \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{2\lambda^2+2\lambda+\frac{3}{2}}{e^{2\lambda}}$$

Or, $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{2\lambda^2+2\lambda+\frac{3}{2}}{e^{2\lambda}} \overset{H}{=} \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{4\lambda+2}{2e^{2\lambda}} \overset{H}{=} \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{4}{4e^{2\lambda}} = 0$

Donc, $\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \frac{3}{2}$

Exercice 6 (7 points)



- $y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = x^2$

  $\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$ avec $y \geqslant 1$

  d'où $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$

- $y = e^{2x} \Leftrightarrow \ln y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln y$ avec $y > 0$

  d'où $g^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln y$

- $g(1) = e^2$

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \pi \cdot \int_1^2 \left[(f^{-1}(y))^2 - (g^{-1}(y))^2\right] \mathrm{d}y + \pi \cdot \int_2^{e^2} \left[1 - (g^{-1}(y))^2\right] \mathrm{d}y \\
&= \pi \cdot \int_1^2 (y - 1 - \frac{1}{4}\ln^2 y)\, \mathrm{d}y + \pi \cdot \int_2^{e^2} (1 - \frac{1}{4}\ln^2 y)\, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$\int \ln^2 y \, \mathrm{d}y$ $\qquad u(y) = \ln^2 y \quad u'(y) = \frac{2\ln y}{y}$

$\qquad v'(y) = 1 \quad v(y) = y$

$= y\ln^2 y - 2\int \ln y \, \mathrm{d}y$ $\qquad u(y) = \ln y \quad u'(y) = \frac{1}{y}$

$\qquad v'(y) = 1 \quad v(y) = y$

$= y\ln^2 y - 2\big(y\ln y - \int 1\, \mathrm{d}y\big)$

$= y\ln^2 y - 2y\ln y + 2y + k$

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \pi\left[\frac{y^2}{2} - y - \frac{1}{4}y\ln^2 y + \frac{1}{2}y\ln y - \frac{1}{2}y\right]_1^2 + \pi\left[y - \frac{1}{4}y\ln^2 y + \frac{1}{2}y\ln y - \frac{1}{2}y\right]_2^{e^2} \\
&= \pi\big(2 - 2 - \tfrac{1}{2}\ln^2 2 + \ln 2 - 1 - \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2}\big) + \pi\big(e^2 - e^2 + e^2 - \tfrac{1}{2}e^2 - 2 + \tfrac{1}{2}\ln^2 2 - \ln 2 + 1\big) \\
&= \pi\big(-\tfrac{1}{2}\ln^2 2 + \ln 2 + \tfrac{1}{2}e^2 - 1 + \tfrac{1}{2}\ln^2 2 - \ln 2\big) \\
&= \tfrac{\pi}{2}(e^2 - 2) \text{ u.v.} \\
&\simeq 8,47 \text{ u.v.}
\end{aligned}$$