Examen de fin d'études secondaires.
Section $\boxed{B}$. Maths 2. septembre 2000.

I

$f : x \mapsto y = 1 - |e^x - e^{2x}|$

1° $\text{dom} f = \mathbb{R}$. donc : $\forall x \in]-\infty, 0] : f(x) = 1 - e^x + e^{2x}$

• $e^x - e^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{2x}$ $\quad \forall x \in [0, +\infty[: f(x) = 1 + e^x - e^{2x}$

$\Leftrightarrow 1 \geq e^x$ $\quad f(0) = 1$.

$\Leftrightarrow 0 \geq x$

f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables.

• Dérivabilité en $x_0 = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 + e^x - e^{2x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-e^x(e^x - 1)}{x} = -1 \cdot 1 = f'_d(1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1 - e^x + e^{2x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x(e^x - 1)}{x} = 1 \cdot 1 = 1 = f'_g(1)$

c.à.d. f est dérivable à droite et à gauche en $x_0 = 0$, mais f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$; $\text{dom} f' = \mathbb{R}^*$.

C_f admet en $x_0 = 0$ 2 demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs $+1$ et -1. $A(0,1)$ est un point anguleux.

2° $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - e^x + e^{2x}) = 1$ $\quad$ A.H. $y = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(e^{-x} + 1 - e^x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\left(\frac{1}{e^x} + 1 - e^x\right) = -\infty$.

C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy)

3° $\text{dom} f' = \mathbb{R}^*$.

• $\forall x \in]-\infty, 0[: f'(x) = -e^x + 2 e^{2x} = e^x(2e^x - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2 \cong -0{,}69$ et $f(-\ln 2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = e^x - 2 e^{2x} = e^x(1 - 2e^x) \neq 0$.

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^x \leq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\ln 2$.

$(\forall x \in]-\infty, 0[: f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq -\ln 2)$.

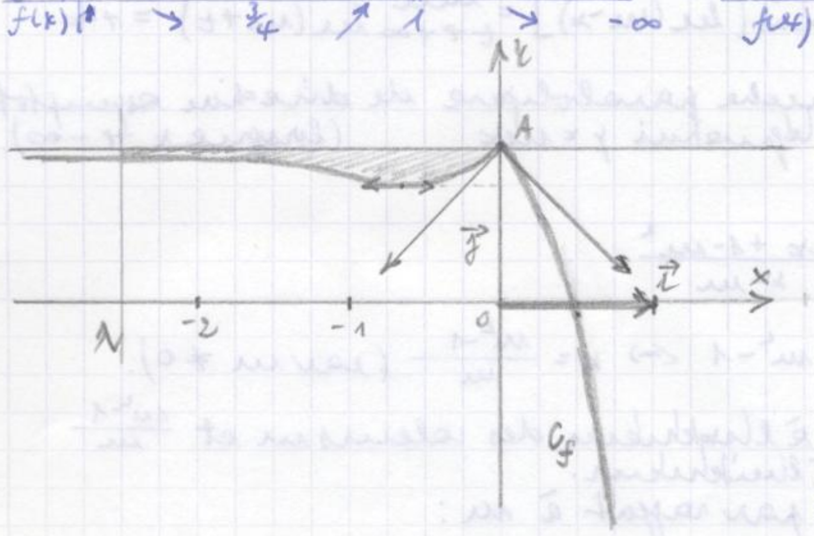
• Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

x	$0{,}5$	1
$f(x)$	$-0{,}07$	$-3{,}67$

4°

5°



$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 [1 - (1 - e^x + e^{2x})]\, dx$

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 (e^x - e^{2x})\, dx$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left[e^x - \frac{1}{2} e^{2x}\right]_\lambda^0$

$\mathcal{A}(\lambda) = 1 - \frac{1}{2} - e^\lambda + \frac{1}{2} e^{2\lambda}$

$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{2} - e^\lambda + \frac{1}{2} e^{2\lambda}$ unités d'aire

Donc : $\mathcal{A}(\lambda) = 2 - 4 e^\lambda + 2 e^{2\lambda}$ cm² car l'unité d'aire vaut 4 cm².

$\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} (2 - 4 e^\lambda + 2 e^{2\lambda}) = 2$ cm².

III

$$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto mx + \ln|x-m| \qquad (m \in \mathbb{R}^*).$$

1° $D_{f_m} = \mathbb{R} - \{m\}$.
f_m est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, m[$ et sur $]m, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions continues et dérivables.

2° $\lim\limits_{x \to m} f_m(x) = m^2 + (-\infty) = -\infty$: A.V. $x = m$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [mx + \ln(x-m)]$ car $\ln(x-m) = \ln x\left(1-\frac{m}{x}\right)$.

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[mx + \ln x + \ln\left(1-\frac{m}{x}\right)\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[m + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{m}{x}\right)}{x}}_{\to 0}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } m>0 \\ -\infty & \text{si } m<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[m + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{m}{x}\right)}{x}\right] = m$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f_m(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-m) = +\infty$

C_m admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite Δ d'équation $y = mx$ (lorsque $x \to +\infty$).

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [mx + \ln(m-x)]$ car $\ln(m-x) = \ln(-x)\left(1-\frac{m}{x}\right)$.

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left[mx + \ln(-x) + \ln\left(1-\frac{m}{x}\right)\right]$

Posons : $t = -x$, $x \to -\infty \Leftrightarrow t \to +\infty$.

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \left[-mt + \ln t + \ln\left(1+\frac{m}{t}\right)\right]$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} t\left[-m + \underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{m}{t}\right)}{t}}_{\to 0}\right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } m>0 \\ +\infty & \text{si } m<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[m + \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{m}{x}\right)}{x}\right]$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \left[m - \frac{\ln t}{t} - \frac{\ln\left(1+\frac{m}{t}\right)}{t}\right] = m$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f_m(x) - mx] = \lim\limits_{x\to-\infty} [\ln(m-x)] = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln(m+t) = +\infty.$

C_m admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite Δ d'équation $y = mx$ (lorsque $x \to -\infty$).

3° $D_{f'_m} = \mathbb{R} - \{m\}$.

• $f'_m(x) = m + \frac{1}{x-m} = \frac{mx + 1 - m^2}{x-m}$

• $f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow mx = m^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{m^2-1}{m}$ (car $m \neq 0$).

• f'_m a le signe de m à l'extérieur des valeurs m et $\frac{m^2-1}{m}$ et le signe contraire à l'intérieur.
Reste à placer $\frac{m^2-1}{m}$ par rapport à m :

$\frac{m^2-1}{m} > m \Leftrightarrow \frac{m^2-1-m^2}{m} > 0 \Leftrightarrow m < 0$

• Tableaux de variation :

$\boxed{m<0}$

x	$-\infty$		m		$\frac{m^2-1}{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \| -\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

$\boxed{m>0}$

x	$-\infty$		$\frac{m^2-1}{m}$		m		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty \| -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

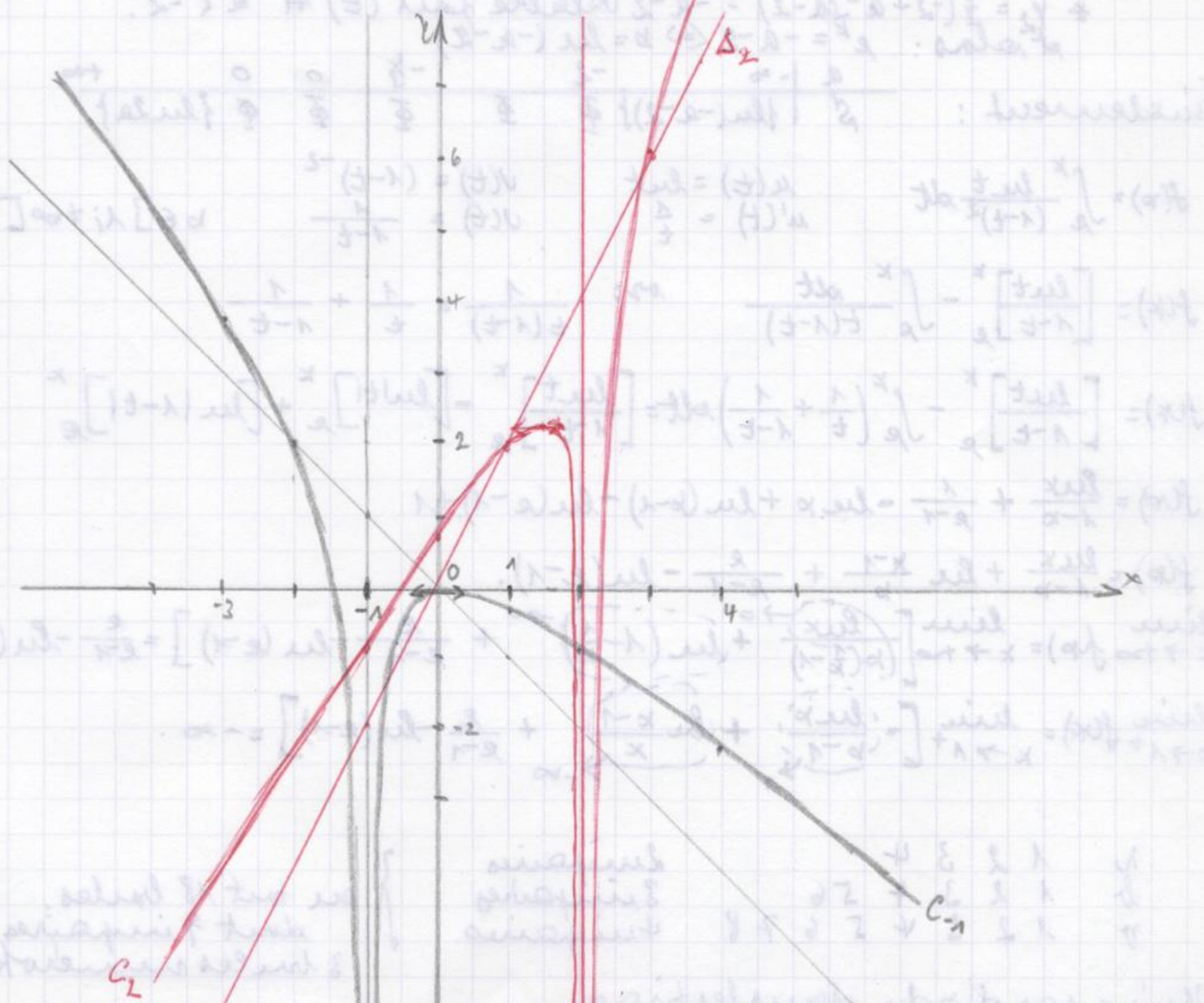
$$f_m\left(\frac{m^2-1}{m}\right) = m\cdot\frac{m^2-1}{m} + \ln\left|\frac{m^2-1}{m} - m\right| = m^2-1+\ln\left|\frac{-1}{m}\right| = m^2-1-\ln|m|$$

4° $\underline{C_{-1}}$: $f_{-1}(x) = -x + \ln|x+1|$ $M(0,0)$; A.V. $x=-1$. Δ $y=-x$

C_2 $f_2(x) = 2x+\ln|x-2|$ $M(\frac{3}{2}\,;\,\underbrace{3-\ln 2}_{2,3})$ A.V. $x=2$ Δ : $y=2x$

x	-2	-3	1	2	4
$f_{-1}(x)$	2	$3,7$	$-0,3$	$-0,9$	$-2,3$

x	-1	0	1	3
$f_2(x)$	$-0,9$	$0,7$	2	6



5° Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}-\{m\,;-m\}$, C_m et C_{-m} sont symétriques p.r.à (Oy).

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-m, m\}$: $-x \in \mathbb{R}-\{-m, m\}$:

$f_{-m}(-x) = -m(-x) + \ln|-x+m|$
$= mx + \ln|x-m| = f_m(x)$.

Donc C_{-m} et C_m sont symétriques p.r.à (Oy).

IV

1° (E) $e^x - 2a(a+2)\cdot e^{-x} + (2-a) = 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

$\iff e^{2x} + (2-a)\cdot e^x - 2a(a+2) = 0$.

L'équation (E) existe $\forall x \in \mathbb{R}$; posons $y = e^x > 0$ et calculons Δ.

(E') $y^2 + (2-a)y - 2a(a+2) = 0$

Discriminant : $\Delta = (2-a)^2 + 8a(a+2) = 9a^2 + 12a + 4 = (3a+2)^2$.

Discussion : $a = -\frac{2}{3}$: $\Delta = 0$ (E') admet la racine double $y = \frac{a-2}{2} = \frac{-\frac{2}{3}-2}{2} = -\frac{4}{3} < 0$.
à rejeter pour (E).

$a \neq -\frac{2}{3}$: $\Delta > 0$ (E') admet 2 racines réelles distinctes y_1 et y_2.

et on a : * $y_1 = \frac{-2+a+3a+2}{2} = 2a$ valable pour (E) si $a > 0$

et alors : $e^x = 2a \iff x = \ln 2a$.

* $y_2 = \frac{1}{2}(-2+a-3a-2) = -a-2$ valable pour (E) si $a < -2$.

et alors : $e^x = -a-2 \iff x = \ln(-a-2)$

Finalement :

a	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
S		$\{\ln(-a-2)\}$	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	$\{\ln 2a\}$	

2° $f(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{(1-t)^2}\,dt$ $\qquad u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$ $\qquad v'(t) = (1-t)^{-2}$, $v(t) = \frac{1}{1-t}$ $\qquad x \in \,]1;+\infty[$.

$f(x) = \left[\frac{\ln t}{1-t}\right]_e^x - \int_e^x \frac{dt}{t(1-t)}$ or : $\frac{1}{t(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}$

$f(x) = \left[\frac{\ln t}{1-t}\right]_e^x - \int_e^x \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = \left[\frac{\ln t}{1-t}\right]_e^x - \left[\ln|t|\right]_e^x + \left[\ln|1-t|\right]_e^x$

$f(x) = \frac{\ln x}{1-x} + \frac{1}{e-1} - \ln x + \ln(x-1) - \ln(e-1) + 1$

$f(x) = \frac{\ln x}{1-x} + \ln\frac{x-1}{x} + \frac{e}{e-1} - \ln(e-1)$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\underbrace{\frac{\ln x}{x(\frac{1}{x}-1)}}_{\to 0} + \underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} + \frac{e}{e-1} - \ln(e-1)\right] = \frac{e}{e-1} - \ln(e-1)$.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}\left[\underbrace{-\frac{\ln x}{x-1}}_{\to 1} + \underbrace{\ln\frac{x-1}{x}}_{\to -\infty} + \frac{e}{e-1} - \ln(e-1)\right] = -\infty$.

3°
r 1 2 3 4 — 2 impaires
b 1 2 3 4 5 6 — 3 impaires
v 1 2 3 4 5 6 7 8 — 4 impaires

} en tout 18 boules dont 9 impaires. 3 boules numérotées 4.

a) Il n'y a pas d'ordre dans les tirages.
$C_9^5 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 126$ tirages.

b.) Pour le 4, il y a 3 tirages possibles et on complète la main par 4 boules tirées parmi les 15 boules (non 4)
$3\cdot C_{15}^4 = 3\cdot\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 4095$ tirages.

c). la b est le N°4. $1\cdot C_{10}^4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$ tirages (4 boules parmi les 10 restantes non b et non N°4).

• la b n'est pas le N°4 : $\underbrace{C_2^1}_{N°4 \neq b.}\cdot \underbrace{C_5^1}_{b \neq N°4}\cdot \underbrace{C_{10}^3}_{3 \text{ parmi les } 10 \text{ restantes}} = 2\cdot 5\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 1200$ tirages.

Réponse : $1200 + 210 = 1410$ tirages.