# Examen de fin d'études secondaires 2014
# Mathématiques II (sections C et D) – Corrigé

**Exercice 1** **( 1,5+2,5 = 4 points )**

1) A démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}, \forall x > 0, \quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Pour tout $x > 0$ :

$$\begin{aligned}
(\log_a)'(x) &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' && \text{par la formule de changement de base des logarithmes} \\
&= \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' \\
&= \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' && \text{car } (ku)' = k \cdot u' \\
&= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} && \text{car } (\ln x)' = \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x \ln a}
\end{aligned}$$

2) A démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a^x)' = a^x \ln a$

Pour cela, dérivons $\ln a^x$ de deux manières différentes :

Pour $x \in \mathbb{R}$,

- $$\begin{aligned}
(\ln a^x)' &= (x \cdot \ln a)' && \text{formule du logarithme d'une puissance} \\
&= (\ln a) \cdot x' && \text{car } (ku)' = k \cdot u' \\
&= (\ln a) \cdot 1 \\
&= \ln a
\end{aligned}$$

- $$(\ln a^x)' = \frac{(a^x)'}{a^x} \qquad \text{car } (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

En comparant les deux résultats obtenus, il en suit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{(a^x)'}{a^x} = \ln a \quad \| \cdot a^x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$$

**Exercice 2** **( 4+(5+5) = 14 points )**

1) Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{2x+3}$ .

Trouver le domaine de définition de $f$ .

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

C.E. $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x-1}>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$dom\ f = \left]-\infty;-5\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{(2x+3)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)}$$

Calculons d'abord :

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+3)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right) \xrightarrow{f.i.} "\infty\cdot 0"$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)}{\dfrac{1}{2x+3}} \xrightarrow{f.i.} "\frac{0}{0}"$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x-1}{x+5}\cdot\dfrac{x-1-(x+5)}{(x-1)^2}}{\dfrac{-2}{(2x+3)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-6}{(x+5)(x-1)}}{\dfrac{-2}{(2x+3)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3(2x+3)^2}{(x+5)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{12x^2}{x^2} = 12$$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(2x+3)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)} = e^{12}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

a) $\log_3 \sqrt{2x-3} \geq \log_3(6-x) - \log_9 x$.

C.E. $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 6-x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{2} \\ x<6 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}<x<6 \qquad D=\left]\dfrac{3}{2};6\right[$

$\log_3 \sqrt{2x-3} \geq \log_3(6-x) - \log_9 x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\log_3(2x-3)+\frac{\log_3 x}{\log_3 9} \geq \log_3(6-x) \quad \|\cdot 2$

$\Leftrightarrow \log_3(2x-3)+\log_3 x \geq 2\log_3(6-x)$

$\Leftrightarrow \log_3 x(2x-3) \geq \log_3(6-x)^2$

$\Leftrightarrow x(2x-3) \geq (6-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2+9x-36 \geq 0 \quad \longrightarrow$ tableau de signe

$\Leftrightarrow x \leq -12 \quad ou \quad x \geq 3$

L'intersection avec le domaine donne : $S_{\mathbb{R}} = [3;6[$

b) $4e^{4x}+e^{-2x}=3 \qquad D=\mathbb{R}$

$4e^{4x}+e^{-2x}=3 \quad \|\cdot e^{2x} \neq 0$

$\Leftrightarrow 4e^{6x}+1=3e^{2x}$

$\Leftrightarrow 4e^{6x}-3e^{2x}+1=0$

$\Leftrightarrow 4(e^{2x})^3-3(e^{2x})+1=0$

Posons : $e^{2x}=y$

$4y^3-3y+1=0 \quad$ (Racine entière évidente: $y=-1$)

Résolvons d'abord :

$\overset{Horner}{\Leftrightarrow} (y+1)\cdot(4y^2-4y+1)=0$

$\Leftrightarrow (y+1)\cdot(2y-1)^2=0$

$\Leftrightarrow y=-1 \quad ou \quad y=\frac{1}{2}$

Revenons à l'équation initiale :

$\underbrace{e^{2x}=-1}_{impossible} \quad ou \quad e^{2x}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x=\ln\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\ln 2}{2}$

D'où : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\ln 2}{2}\right\}$

**Exercice 3** **( (0,5+4+4+4+0,5+3)+6 = 22 points )**

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=(x+2)^2 e^{-x}$.

1) Etudier la fonction $f$ :

- domaines de définition, de continuité et de dérivabilité
  $dom\ f = \mathbb{R} = dom_c\ f = dom\ f'$
- limites aux bornes du domaine et asymptotes

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x+2)^2}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \xrightarrow{f.i.} "0\cdot\infty"$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^2}{e^x} \xrightarrow{f.i.} "\frac{\infty}{\infty}"$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x+2)}{e^x} \xrightarrow{f.i.} "\frac{\infty}{\infty}"$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} \xrightarrow{f.i.} "\frac{\infty}{\infty}"$$
$$= 0^+$$

→ $AH : y=0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x+2)^2}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} = +\infty$$ pas d'AH ; évt. une $AO : y=ax+b$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(x+2)^2}{x}}}_{\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} = -\infty$$

La courbe $C_f$ admet en $-\infty$ une BP de direction asymptotique $(Oy)$.

- dérivée, tableau de variation et extrema éventuels
  $dom\ f' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2(x+2)e^{-x} - (x+2)^2 e^{-x}$$
$$= e^{-x}\left[2(x+2)-(x+2)^2\right]$$
$$= (x+2)e^{-x}\left[2-(x+2)\right]$$
$$= -x(x+2)e^{-x}$$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow x=-2 \quad ou \quad x=0$

Le signe de la dérivée est celui de $-x(x+2)$, car $e^{-x}$ est str. positif.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | 4 | ↘ | $0^+$ |
| | BP de DA (Oy) | | | | | | AH :y=0 |

$f$ admet un minimum absolu en $x=-2$ : $f(-2)=0$. D'où : $m(-2;0)$

$f$ admet un maximum local en $x=0$ : $f(0)=4$. D'où : $M(0;4)$

- concavité de la courbe et points d'inflexion éventuels

$dom\, f' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(-x^2-2x\right)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x-2)e^{-x} - \left(-x^2-2x\right)e^{-x} \\ &= e^{-x}\cdot\left[(-2x-2)-\left(-x^2-2x\right)\right] \\ &= \left(x^2-2\right)e^{-x} \end{aligned}$$

$$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow x=-\sqrt{2} \quad ou \quad x=\sqrt{2}$$

Le signe de la dérivée seconde est celui de $\left(x^2-2\right)$, car $e^{-x}$ est str. positif.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ $\approx -1,41$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ $\approx 1,41$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | | ↗ | $4$ | ↘ | | ↘ | $0^+$ AH :y=0 |
| | BP de DA (Oy) | | | | | | | | | | |
| $C_f$ | | Conc. vers le haut | | Conc. vers le haut | $I_1$ | Conc. vers le bas | | Conc. vers le bas | $I_2$ | Conc. vers le haut | |

$C_f$ admet un minimum absolu en $x=-2$ : $m=f(-2)=0$. D'où : $A(-2;0)$

$C_f$ admet un maximum local en $x=0$ : $M=f(0)=4$. D'où : $B(0;4)$

$C_f$ admet un point d'inflexion en $x=-\sqrt{2}$ : $f\left(-\sqrt{2}\right)\approx 1,41 \rightarrow I_1(-1,41;1,41)$

$C_f$ admet un point d'inflexion en $x=\sqrt{2}$ : $f\left(\sqrt{2}\right)\approx 2,83 \rightarrow I_2(1,41;2,83)$

- points d'intersection de la courbe $C_f$ avec l'axe des abscisses

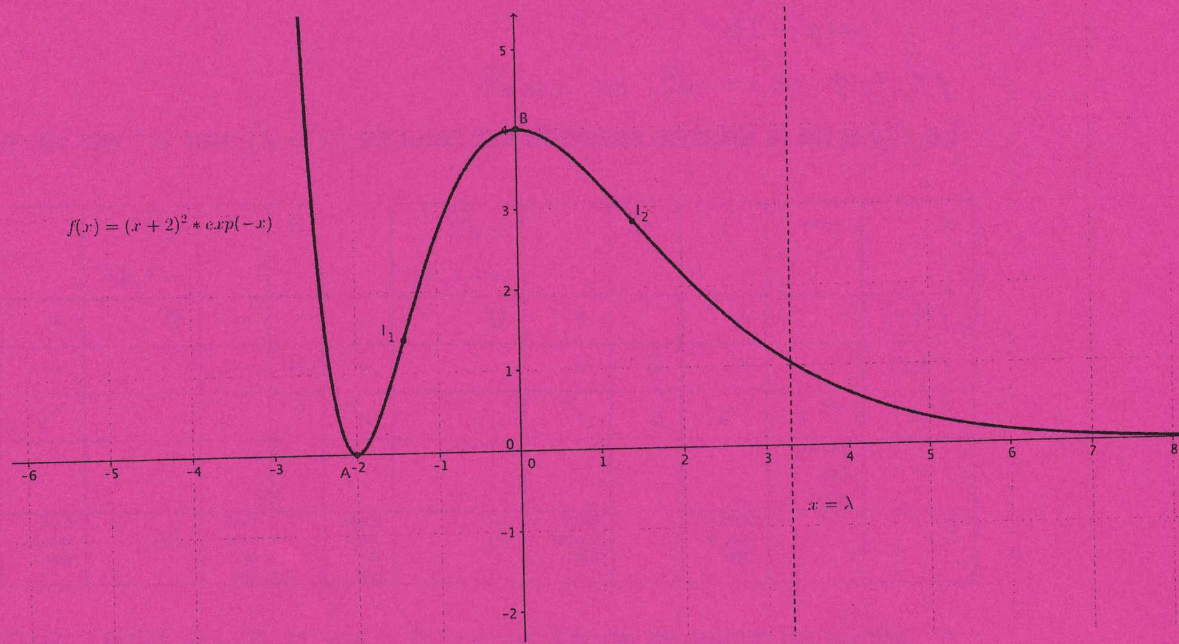
$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow (x+2)^2 e^{-x}=0 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \quad ou \quad \underbrace{e^{-x}=0}_{impossible} \\ &\Leftrightarrow x=-2 \end{aligned}$$

La courbe admet un seul point d'intersection avec l'axe (Ox) : $A(-2;0)$

- représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité $1\,cm$

  Tableau de valeurs :

| $x$ | -3 | -2,5 | -2 | -1,41 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,41 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 20,1 | 3,0 | 0 | 1,41 | 2,72 | 3,71 | 4 | 3,8 | 3,31 | 2,83 | 2,1 | 1,2 | 0,66 |
| | | | min | Pt. d'infl | | | max | | | Pt. d'infl. | | | |




2) La fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}$.

$$A_\lambda = \int_{-2}^{\lambda} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{\lambda} (x+2)^2 e^{-x}\,dx$$

Intégration par parties :

$u = (x+2)^2 \qquad u' = 2x+4$

$v' = e^{-x} \qquad v = -e^{-x}$

$$A_\lambda = \left[-(x+2)^2 e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda} + \int_{-2}^{\lambda} (2x+4)e^{-x}\,dx$$

Intégration par parties :

$u = 2x+4 \qquad u' = 2$

$v' = e^{-x} \qquad v = -e^{-x}$

$$
\begin{aligned}
A_\lambda &= \left[-(x+2)^2 e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda} + \left[-(2x+4)e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda} + \int_{-2}^{\lambda} 2e^{-x}\,dx \\
&= \left[(x+2)^2 e^{-x}\right]_{\lambda}^{-2} + \left[(2x+4)e^{-x}\right]_{\lambda}^{-2} + 2\left[e^{-x}\right]_{\lambda}^{-2} \\
&= 0-(\lambda+2)^2 e^{-\lambda} + 0 - (2\lambda+4)e^{-\lambda} + 2e^2 - 2e^{-\lambda} \\
&= \left(-\lambda^2 - 4\lambda - 4 - 2\lambda - 4 - 2\right)e^{-\lambda} + 2e^2 \\
&= \left(-\lambda^2 - 6\lambda - 10\right)e^{-\lambda} + 2e^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} A_\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(-\lambda^2-6\lambda-10\right)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{-\lambda}}_{\to 0} + 2e^2\right] \xrightarrow{f.i.} "0\cdot\infty" \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\lambda^2-6\lambda-10}{e^{\lambda}} + 2e^2\right] \xrightarrow{f.i.} "\frac{\infty}{\infty}" \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2\lambda-6}{e^{\lambda}} + 2e^2\right] \xrightarrow{f.i.} "\frac{\infty}{\infty}" \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{e^{\lambda}} + 2e^2\right] \\
&= 2e^2\ u.a. \\
&\approx 14{,}78\ cm^2
\end{aligned}
$$

**Exercice 4** **( 6+2 = 8 points )**

$$f(x)=\frac{x}{3}-1+\frac{\ln x}{x}.$$

1) $dom\, f = ]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{\boxed{\frac{\overbrace{x}^{\to 0}}{3}}}_{\to 0}-1+\underbrace{\boxed{\frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0+}}}}_{\to -\infty}\right)=-\infty \;:\; AV: x=0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{3}-1+\underbrace{\boxed{\frac{\ln x}{x}}}_{\xrightarrow{*} 0}\right)=+\infty$$

En effet : $(*)$: $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0^+$

pas d'AH ; évt. une $AO: y=ax+b$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{3}-\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to 0}+\underbrace{\boxed{\frac{\ln x}{x^2}}}_{\xrightarrow{**} 0}\right)=\frac{1}{3}=a$$

En effet : $(**)$: $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2x^2}=0^+$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-\frac{1}{3}x\right] = \lim_{x\to +\infty}\left(-1+\underbrace{\boxed{\frac{\ln x}{x}}}_{\xrightarrow{*} 0}\right)=-1=b$$

Conclusion : au voisinage de $+\infty$, la courbe de $f$ admet une $AO: y=\frac{1}{3}x-1$.

2) Etudier la position de la courbe représentative de $f$ par rapport à ses asymptotes horizontales ou obliques éventuelles.

$$\varepsilon(x)=f(x)-\left(\frac{x}{3}-1\right)=\frac{\ln x}{\underbrace{\boxed{x}}_{>0}} \qquad (\forall x\in dom\, f=]0;+\infty[)$$

Le signe de $\varepsilon(x)$ est celui de $\ln x$.

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon(x)$ | $\|\|$ | $-$ | 0 | $+$ | |

Conclusion : au voisinage de $+\infty$, la courbe de $f$ se trouve au-dessus de son $AO: y=\frac{1}{3}x-1$.

**Exercice 5** **( (3,5+3,5)+5 = 12 points )**

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1+5x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{5x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx - \frac{5}{2}\cdot\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx - \frac{5}{2}\cdot\int_0^{\frac{3}{2}} (-2x)\cdot\left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

a)

$$= \left[Arc\sin\frac{x}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{2}\cdot\left[2\cdot\sqrt{9-x^2}\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$= Arc\sin\frac{1}{2} - 0 - 5\cdot\left(\sqrt{\frac{27}{4}} - 3\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{15\sqrt{3}}{2} + 15$$

$$\approx 2{,}533$$

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\left(5-2\sin^2 x\right)^3}\,dx$$

$$u = 5 - 2\sin^2 x$$

$$u' = -4\sin x\cdot\cos x = -2\sin 2x$$

$$= \frac{1}{-2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin 2x}{\left(5-2\sin^2 x\right)^3}\,dx$$

fonction : $u'\cdot u^{-3}$

primitive : $\frac{1}{-2}\cdot u^{-2}$

$$= \frac{1}{-2}\cdot\left[\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{\left(5-2\sin^2 x\right)^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{25}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{25}{225}-\frac{9}{225}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{225} = \frac{4}{225}$$

2) Dans un repère orthonormé d'unité $2\,cm$, calculer, au $cm^3$ près, le volume $V$ du solide engendré par la rotation autour de l'axe des $x$ de la surface comprise entre la parabole d'équation $y=4-x^2$ et la droite d'équation $y=2-x$.

$f(x)=4-x^2$

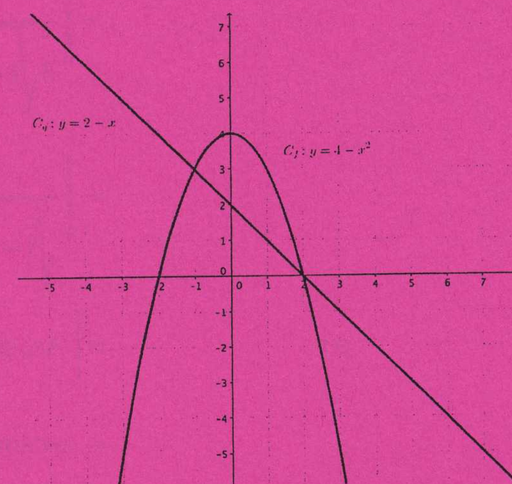
$g(x)=2-x$

$f(x)-g(x)=0$

$\Leftrightarrow 4-x^2-(2-x)=0$

$\Leftrightarrow -x^2+x+2=0$

$\Leftrightarrow x=-1 \quad ou \quad x=2$




$f$ et $g$ sont positives sur $[-1;2]$ et $f \geq g$ sur $[-1;2]$.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{2} \pi \cdot \left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx \\
&= \pi \cdot \int_{-1}^{2} \left[\left(4-x^2\right)^2-\left(2-x\right)^2\right]dx \\
&= \pi \cdot \int_{-1}^{2} \left[\left(16-8x^2+x^4\right)-\left(4-4x+x^2\right)\right]dx \\
&= \pi \cdot \int_{-1}^{2} \left(x^4-9x^2+4x+12\right)dx \\
&= \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5-3x^3+2x^2+12x\right]_{-1}^{2} \\
&= \pi \cdot \left[\left(\frac{32}{5}\cancel{-24}+8\cancel{+24}\right)-\left(-\frac{1}{5}+3+2-12\right)\right] \\
&= \frac{108\pi}{5} \quad u.v. \\
&= \frac{864\pi}{5} cm^3 \\
&\approx 543\,cm^3
\end{aligned}
$$