Examen de fin d'études secondaires 2014
Mathématiques II (sections C et D) – Corrigé

Exercice 1 (1,5+2,5 = 4 points)

1) A démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}, \forall x > 0, \quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
(\log_a)'(x) &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' && \text{par la formule de changement de base des logarithmes}\\
&= \left(\frac{1}{\ln a}\cdot \ln x\right)' \\
&= \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' && \text{car } (ku)' = k\cdot u' \\
&= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} && \text{car } (\ln x)' = \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x\ln a}
\end{aligned}$$

2) A démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a^x)' = a^x \ln a$

Pour cela, dérivons $\ln a^x$ de deux manières différentes :

Pour $x \in \mathbb{R}$,

- $$\begin{aligned}
(\ln a^x)' &= (x\cdot \ln a)' && \text{formule du logarithme d'une puissance}\\
&= (\ln a)\cdot x' && \text{car } (ku)' = k\cdot u' \\
&= (\ln a)\cdot 1 \\
&= \ln a
\end{aligned}$$

- $(\ln a^x)' = \dfrac{(a^x)'}{a^x}$ car $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

En comparant les deux résultats obtenus, il en suit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(a^x)'}{a^x} = \ln a \quad \| \cdot a^x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow (a^x)' = (\ln a)\cdot a^x$$

Exercice 2 **(4+(5+5) = 14 points)**

1) Soit la fonction f définie par $f(x)=\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{2x+3}$.

Trouver le domaine de définition de f.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

C.E. $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x-1}>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$dom\, f = \left]-\infty;-5\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{(2x+3)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)}$$

Calculons d'abord :

$$\lim_{x\to+\infty} (2x+3)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right) \xrightarrow{f.i.} "\infty\cdot 0"$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)}{\dfrac{1}{2x+3}} \xrightarrow{f.i.} "\frac{0}{0}"$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x-1}{x+5}\cdot\dfrac{x-1-(x+5)}{(x-1)^2}}{\dfrac{-2}{(2x+3)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{-6}{(x+5)(x-1)}}{\dfrac{-2}{(2x+3)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3(2x+3)^2}{(x+5)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^2}{x^2} = 12$$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(2x+3)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)} = e^{12}$