Corrigé - Mathématiques II

Sections C et D

Question I

1) Voir livre à la page 55

2) a) $\dfrac{e^{2x}+2e^{x}}{10e^{-x}-1}=e^{x}$

C.E.: $10e^{-x}-1\neq 0$

Résolvons $10e^{-x}=1$

$\Leftrightarrow e^{x}=10$

$\Leftrightarrow x=\ln 10$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\ln 10\}$ on a

$e^{2x}+2e^{x}=10-e^{x}$

$\Leftrightarrow e^{2x}+3e^{x}-10=0$

Posons $y=e^{x}>0$

Alors l'équation s'écrit

$y^2+3y-10=0$ | $\Delta=49$, $y_1=-5$, $y_2=2$

$\Leftrightarrow \underbrace{y=-5}_{\text{à écarter}}$ ou $y=2$

et donc $e^{x}=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

$S=\{\ln 2\}$

b) $\log_{25}(2)-\log_{\frac{1}{5}}(x-1)\geq \log_5(x+2)$

C.E.: ① $x>1$

② $x>-2$

$\forall x\in\,]1;+\infty[$ on a

$\dfrac{\ln 2}{\ln 25}-\dfrac{\ln(x-1)}{\ln\frac{1}{5}}\geq\dfrac{\ln(x+2)}{\ln 5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln 2}{2\ln 5}+\dfrac{\ln(x-1)}{\ln 5}\geq\dfrac{\ln(x+2)}{\ln 5}$ $\quad|\cdot\ln 5>0$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{2}+\ln(x-1)\geq\ln(x+2)$

$\Leftrightarrow \ln[\sqrt{2}(x-1)]\geq\ln(x+2)$ $\quad|e$

$\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \underbrace{\sqrt{2}(x-1)}_{>0}\geq\underbrace{x+2}_{>0}$ $\quad|(\,)^2$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2\geq(x+2)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2-x^2-4x-4\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-8x-2\geq 0$ | $\Delta=72$, $x_1=4+3\sqrt{2}$, $x_2=4-3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x\leq 4-3\sqrt{2}$ ou $x\geq 4+3\sqrt{2}$

$S=[4+3\sqrt{2};+\infty[$

3) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}5^{-x+1}\log_{\frac{1}{2}}(-x)$

$=\text{"}(+\infty)\cdot(-\infty)\text{"}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{x}\cdot\ln(x+1)=\text{"}0^{+}\cdot(+\infty)\text{"}$ f.i

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\left(\frac{7}{2}\right)^{x}}=\text{"}\dfrac{+\infty}{+\infty}\text{"}$ f.i.

$\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{\left(\frac{7}{2}\right)^{x}\cdot\ln\left(\frac{7}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x+1)\left(\frac{7}{2}\right)^{x}\cdot\underbrace{\ln\left(\frac{7}{2}\right)}_{>0}}$

$=\text{"}\dfrac{1}{+\infty}\text{"}=0^{+}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^{-x}$ f.i.

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{(-x)\cdot\ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right)}$$

Calculons

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot\ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right) = \text{“}-\infty\cdot 0\text{”} \text{ f.i.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \text{ f.i.}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-1}{x-3}\cdot\frac{x-1-x+3}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{2x^2}{(x-3)(x-1)} = -2$$

Et donc

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^{-x} = e^{-(-2)} = e^2$$

Question II

$$f(x) = (x^2-1)\cdot e^{2x}$$

) On a que $\mathrm{dom}_f = \mathbb{R}$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2-1)\cdot e^{2x} = \text{“}(+\infty)\cdot(+\infty)\text{”} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{2x} = \text{“}(+\infty)\cdot(+\infty)\text{”} = +\infty$$

B.P.D. dans la direction de (Oy)

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2-1)e^{2x} = \text{“}(+\infty)\cdot 0^+\text{”}$ f.i.

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{e^{-2x}} = \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”} \text{ f.i.}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-2e^{-2x}} = \text{“}\frac{-\infty}{-\infty}\text{”} \text{ f.i.}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2e^{-2x}} = \text{“}\frac{1}{+\infty}\text{”} = 0^+$$

A.H.G. d'éq. $y=0$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2-1)\cdot 2e^{2x}$$

$$= \underbrace{2e^{2x}}_{>0}\underbrace{(x^2+x-1)}_{\Delta=5}$$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt5}{2}$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt5}{2}$

d'où

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt5}{2}$		$\frac{-1+\sqrt5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau des variations

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt5}{2}$		$\frac{-1+\sqrt5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0^+	$\nearrow$	y_M	$\searrow$	y_m	$\nearrow$	$+\infty$

avec $y_M \simeq 0{,}064$ et $y_m \simeq -2{,}13$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a

$$f''(x) = 4e^{2x}(x^2+x-1) + 2e^{2x}(2x+1)$$

$$= 2e^{2x}(2x^2+2x-2+2x+1)$$

$$= \underbrace{2e^{2x}}_{>0}\underbrace{(2x^2+4x-1)}_{\Delta=24}$$

$x_1 = \frac{-2+\sqrt6}{2}$

$x_2 = \frac{-2-\sqrt6}{2}$

d'où

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt6}{2}$		$\frac{-2+\sqrt6}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il y a donc deux points d'inflexion d'abscisses respectives

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt6}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2+\sqrt6}{2}$$

4) • Intersection avec l'axe des x :

$$f(x)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=1$$

Les points d'intersection sont donc $I_1(-1;0)$ et $I_2(1;0)$.

• Intersection avec l'axe des y :

$$f(0)=(0-1)\cdot e^0=-1$$

Le point d'intersection est donc $I_3(0;-1)$.

5) On a

$$\mathcal{A}_\lambda = \int_\lambda^{-1} (x^2-1)\, e^{2x}\, dx$$

On pose $u(x)=x^2-1$ et $v'(x)=e^{2x}$
alors $u'(x)=2x$ et $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

D'où

$$\mathcal{A}_\lambda = \left[(x^2-1)\cdot\tfrac{1}{2}e^{2x}\right]_\lambda^{-1} - \int_\lambda^{-1} x e^{2x}\, dx$$

On pose $w(x)=x$ et $v'(x)=e^{2x}$
alors $w'(x)=1$ et $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

D'où

$$\mathcal{A}_\lambda = \left[(x^2-1)\tfrac{1}{2}e^{2x}\right]_\lambda^{-1} - \left[\tfrac{1}{2}xe^{2x}\right]_\lambda^{-1} + \tfrac{1}{2}\int_\lambda^{-1} e^{2x}\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \tfrac{1}{2}xe^{2x} + \tfrac{1}{4}e^{2x}\right]_\lambda^{-1}$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2e^{2x} - \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x}\right]_\lambda^{-1}$$

$$= \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} - \tfrac{1}{2}\lambda^2 e^{2\lambda} + \tfrac{1}{2}\lambda e^{2\lambda} + \tfrac{1}{4}e^{2\lambda}$$

$$= \frac{3}{4e^2} - \tfrac{1}{2}e^{2\lambda}\left(\lambda^2-\lambda-\tfrac{1}{2}\right) \text{ u.a.}$$

Alors

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \mathcal{A}_\lambda = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to-\infty} \frac{\lambda^2-\lambda-\frac{1}{2}}{e^{-2\lambda}}$$

$$\overset{(H)}{=} \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to-\infty} \frac{2\lambda-1}{-2e^{-2\lambda}}$$

$$\overset{(H)}{=} \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to-\infty} \underbrace{\frac{2}{4e^{-2\lambda}}}_{\to 0^+}$$

$$= \frac{3}{4e^2} \text{ u.a.}$$

6) On cherche l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $I_2(1;0)$.
Cette équation s'écrit

$$y = f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$$
$$\Leftrightarrow y = 2e^2(x-1)+0$$
$$\Leftrightarrow y = 2e^2x-2e^2$$

Question III

1) Voir livre à la page 86

2) a) $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+\ln(-x)}{x^3}\, dx$

$$= \int_{-2}^{-1} x^{-2}\, dx + \int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x^3}\, dx$$

On pose $u(x)=\ln(-x)$ et $v'(x)=x^{-3}$
alors $u'(x)=+\frac{1}{x}$ et $v(x)=-\frac{1}{2}x^{-2}$

D'où

$$I_1 = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{-1} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln(-x)}{x^2}\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} x^{-3}\, d$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{5}{16} + \frac{1}{8}\ln 2$$

) $I_2 = \int \sin^3(2x)\cdot\cos(2x)\,dx$

$= \int \sin(2x)\left[1-\cos^2(2x)\right]\cdot\cos(2x)\,dx$

$= \int \left(\sin(2x)\cos(2x) - \sin(2x)\cdot\cos^3(2x)\right)dx$

$= -\frac{1}{4}\cos^2(2x) + \frac{1}{8}\cos^4(2x) + k$

a) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a

$x) = \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{c}{x-1}$

$= \frac{(ax+b)(x-1)+c(x^2+4)}{(x^2+4)(x-1)}$

$= \frac{ax^2-ax+bx-b+cx^2+4c}{x^3-x^2+4x-4}$

$= \frac{(a+c)x^2+(-a+b)x-b+4c}{x^3-x^2+4x-4}$

Par identification, il faut résoudre

$$\begin{cases} a+c=3 \\ -a+b=-2 \\ -b+4c=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=3 \\ b+c=1 \\ -b+4c=9 \end{cases} \quad E_2 / E_1+E_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=3 \\ b+c=1 \\ 5c=10 \end{cases} \quad E_3 / E_2+E_3$$

On en tire que $c=2$, $a=1$ et $b=-1$.

$x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4} + \frac{2}{x-1}$

b) $\forall x \in I =]-\infty;1[$ on a

$F(x) = \int f(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{2}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx + 2\ln|x-1|$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + k$

Alors $F(0)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 4 + k = 0$

$\Leftrightarrow k = -\ln 2$

D'où la primitive cherchée s'écrit

$\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \ln 2$

4) On pose $f(x) = x^2-5$ et $g(x) = 2x-5$

Alors $f(x)-g(x) = x^2-2x = x(x-2)$

D'où

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les deux graphes se coupent aux points d'abscisses 0 et 2.

Le graphe de g est str. au-dessus du graphe de f sur $]0;2[$.

Attention : $\forall x\in]0;2[$: $f(x)<0$ et $g(x)<0$

D'où

$V = \pi\int_0^2 [f(x)]^2dx - \pi\int_0^2 [g(x)]^2dx$

$= \pi\int_0^2 (x^4-10x^2+25)dx - \pi\int_0^2 (4x^2-20x+25)dx$

$= \pi\int_0^2 (x^4-14x^2+20x)dx$

$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{14}{3}x^3 + 10x^2\right]_0^2$

$= \pi\left(\frac{32}{5} - \frac{112}{3} + 40\right)$

$= \frac{136}{15}\pi$ u.v.