# Corrigé 'modèle'

I.

1) $\ln \dfrac{1+e^x}{1-e^x} \leq 1$ $\quad (1+e^x>0)$ $\quad$ CE. : $1-e^x>0 \Leftrightarrow x<0$ $\quad D=]-\infty;0[$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+e^x}{1-e^x} \leq e \Leftrightarrow e^x(1+e) \leq e-1 \Leftrightarrow e^x \leq \dfrac{e-1}{e+1} \Leftrightarrow x \leq \ln\dfrac{e-1}{e+1}$ $(\simeq -0{,}77) \Rightarrow S=]-\infty;\ln\dfrac{e-1}{e+1}]$

2) $\ln x - 2\ln(x-4) = -\ln 2$ $\quad D=]4;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln 2x = \ln(x-4)^2 \Leftrightarrow 2x=(x-4)^2 \Leftrightarrow x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow x=2\ (\notin)$ ou $x=8\ (\in)$ $\quad S=\{8\}$

3) $\log_{\sqrt{\frac{1}{2}}}(2-x^2)+\log_{\frac{1}{\sqrt2}} x < \log_{\sqrt2} x$ $\quad D=]0;\sqrt2[$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{\sqrt2}} x\cdot(2-x^2) < -\log_{\frac{1}{\sqrt2}} x \Leftrightarrow \log_{\frac12} x^2(2-x^2)<0 \Leftrightarrow x^2(2-x^2)>1$

$\Leftrightarrow -(x^2-1)^2>0$ impossible $\quad S=\emptyset$

II 1) $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$ ; $x\in]0;+\infty[$

a) $g(1)=\frac{1}{1}-1-\underbrace{\ln 1}_{=0}=0$

b) $\forall x>0$ : $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$ ,

$g$ est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et comme $g(1)=0$, on obtient le tableau des signes suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

2) $f(x)=e^{-x}\cdot(1+\ln x)$ ; $x\in]0;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{e^{-x}}_{\to 1}(1+\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}) = -\infty \Rightarrow x=0$ AV

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\ln x)\to+\infty}{(e^x)\to+\infty} \underset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\underbrace{xe^x}_{\to+\infty}} = 0 \Rightarrow y=0$ AH en $+\infty$

b) $\forall x>0$ : $f'(x)=-e^{-x}(1+\ln x)+e^{-x}\cdot\frac{1}{x}=e^{-x}\left(-1-\ln x+\frac{1}{x}\right)=e^{-x}\cdot g(x)$

c) D'après 1) b)

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $0$ |

$f(1)=\frac{1}{e}$

maximum local $(1;\frac{1}{e})$

III $f(x)=e^x-\frac{e}{x}$

1) dom $f=\mathbb{R}^*$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{\to 0}-\underbrace{\tfrac{e}{x}}_{\to 0}) = 0 \Rightarrow y=0$ AH en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\underbrace{e^x}_{\to+\infty}-\underbrace{\tfrac{e}{x}}_{\to 0}) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(\underbrace{e^x}_{\to 1}-\underbrace{\tfrac{e}{x}}_{\to-\infty}) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x=0$ AV

2) $\forall x\neq 0$ $\quad f'(x)=e^x+\dfrac{e}{x^2}>0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

3) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1}\left(e^x-\frac{e}{x}\right)dx = \left[e^x-e\ln|x|\right]_{-2}^{-1}$

$=\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}+e\ln 2\right)$ u.A

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln\sqrt{x}} = 2\int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx = 2\left[\ln|\ln x|\right]_e^{e^2} = 2\ln 2$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\left(\sin^2 x+1\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(2x)\cdot\sin^2 x + \sin(2x)\right) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\sin^3 x\cos x + \sin(2x)\right] dx = \left[\frac{1}{2}\sin^4 x - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3) $\int (2x^2-1)e^{-x}\, dx$

$u(x) = 2x^2-1 \Rightarrow u'(x) = 4x$
$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$

$= -(2x^2-1)e^{-x} + 4\int xe^{-x}dx$

$u(x) = x \to u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$

$$= -(2x^2-1)e^{-x} + 4\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right) = -(2x^2+4x+3)e^{-x} + k,\ k\in\mathbb{R}$$

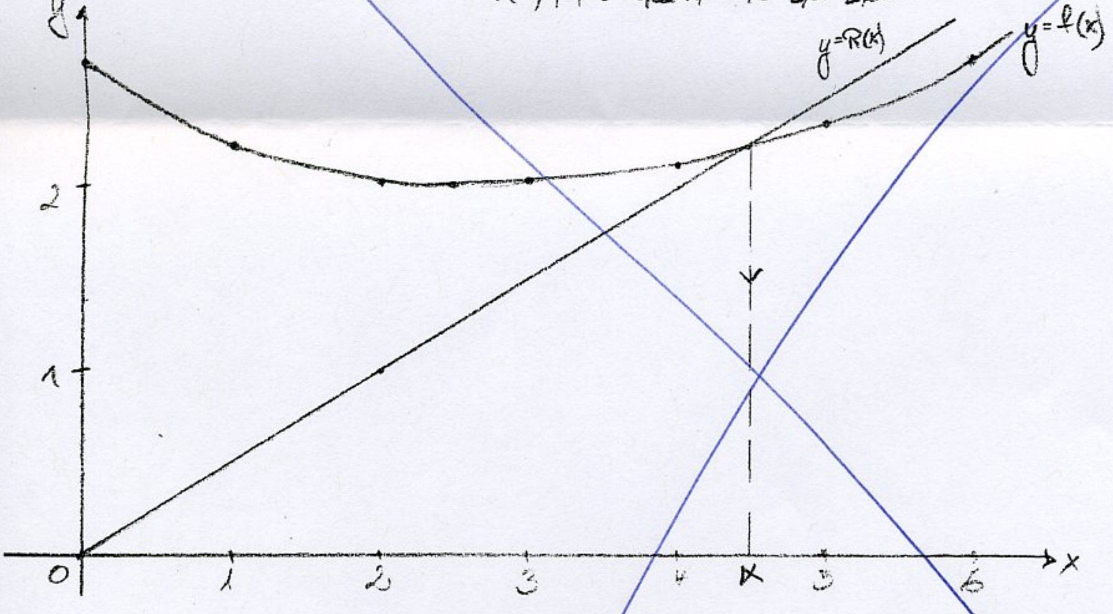
## V Partie A

$f(x) = 0{,}4x + e^{-0{,}4x+1}$ ; $f'(x) = 0{,}4 - 0{,}4e^{-0{,}4x+1}$ ; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}5$ ; $f'(3) > 0$, $f'(2) < 0$

| $x$ | $0$ | | $2{,}5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Quelques points . $f(2{,}5) = 2$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(0) = e$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,22 | 2,02 | 2,02 | 2,15 | 2,37 | 2,65 |




## Partie B

1. a) Pour x centaines d'objets, on obtient $500x$ €, ce qui correspond à $0{,}5x$ milliers €. D'où $R(x) = 0{,}5x$
   b) graphique
   c) $\alpha \simeq 4{,}5$

2. a) $B(x) = R(x) - f(x) = 0{,}5x - 0{,}4x - e^{-0{,}4x+1} = 0{,}1x - e^{-0{,}4x+1}$
   b) $\forall x \geq 0$ : $B'(x) = 0{,}1 + 0{,}4e^{-0{,}4x+1} > 0 \Rightarrow B$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
   c) $B(x) = 0 \Leftrightarrow x \simeq 4{,}4976 = \alpha$ car $B(x) = 0 \Leftrightarrow R(x) = f(x)$
   d) À partir de 450 objets, il y a gain

Problème

$f(t) = 36{,}5 + t e^{-0{,}1t}$

1) a) $f'(t) = (1-0{,}1t)e^{-0{,}1t}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}1t = 0$

$\Leftrightarrow t = 10$

| $t$ | 0 | | 10 | | 48 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | + | 0 | − | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | 40,18 | $\searrow$ | |

La température est la plus élevée après 10 heures.
Elle est alors égale à $f(10) = 40{,}18°C$.

b) $f''(t) = (0{,}01t - 0{,}2)e^{-0{,}1t}$

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}01t - 0{,}2 = 0$

$\Leftrightarrow t = 20$

| $t$ | 0 | | 20 | | 48 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(t)$ | | − | 0 | + | |
| $f'(t)$ | 1 | $\searrow$ | −0,14<br>m | $\nearrow$ | −0,03 |

La température monte le plus vite au début de la maladie (à la vitesse de 1°C/h).
Elle descend le plus vite après 20 heures (à la vitesse de 0,14°C/h).

c) $f(t) = 37 \Leftrightarrow \underbrace{t = 0{,}53}_{\text{à rejeter}}$ ou $t = 45$

La température descend à nouveau en-dessous de 37°C après 45 heures.

2) a) Comme la température doit retomber finalement à la température corporelle normale, il faut que

$$\lim_{t\to+\infty} (a + \underbrace{be^{-ct}}_{\downarrow\, 0}) = 36{,}5.$$

Donc $a = 36{,}5$.

b) On a les conditions suivantes :

$g(0) = f(5)$ et $g(2) = 38{,}4$

En résolvant ce système d'équations on obtient

$b = 3{,}03$ et $c = 0{,}23$.

La fonction cherchée est donc $g(t) = 36{,}5 + 3{,}03e^{-0{,}23t}$.

c) $f(t+5) - g(t) = 1 \Leftrightarrow t = 1{,}15$ ou $t = 30{,}74$

Après 1,15 heures, la température est pour la première fois inférieure d'un degré à la température sans prise de médicament.

1) a)

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $36.5 + t \cdot e^{-.1 \cdot t} \to f(t)$ — Done
- $\frac{d}{dt}(f(t))$ — $\left(1 - \frac{t}{10}\right) \cdot e^{\frac{-t}{10}}$
- $\text{solve}\left(\frac{d}{dt}(f(t)) = 0, t\right)$ — $t = 10$
- f(10) — 40.178794412

f(10)

DROITES RAD EXACT FUNC 4/30

b)

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $\frac{d^2}{dt^2}(f(t))$ — $\left(\frac{t}{100} - 1/5\right) \cdot e^{\frac{-t}{10}}$
- $\text{solve}\left(\frac{d^2}{dt^2}(f(t)) = 0, t\right)$ — $t = 20$
- $\frac{d}{dt}(f(t)) \mid t = 0$ — 1

d(f(t),t)|t=0

DROITES RAD EXACT FUNC 7/30

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $\text{solve}\left(\frac{d^2}{dt^2}(f(t)) = 0, t\right)$ — $t = 20$
- $\frac{d}{dt}(f(t)) \mid t = 0$ — 1
- $\frac{d}{dt}(f(t)) \mid t = 20$ — -.13533528324
- $\frac{d}{dt}(f(t)) \mid t = 48$ — -.03127303879

d(f(t),t)|t=48

DROITES RAD EXACT FUNC 9/30

c)

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- solve(f(t) = 37, t)
  t = .52705983552 or t = 44.997552885

solve(f(t)=37,t)

Warning: More solutions may exist

2) b)

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $36.5 + b \cdot e^{-c \cdot t} \to g(t)$ — Done
- solve(g(0) = f(5) and g(2) = 38.4, {b c})
  b = 3.0326532986 and c = .23379201313

...)=f(5) and g(2)=38.4, {b,c})

DROITES RAD EXACT FUNC 2/30

c)

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $36.5 + 3.03 \cdot e^{-.23 \cdot t} \to g(t)$ — Done
- solve(f(t + 5) − g(t) = 1, t)
  t = 1.1511509676 or t = 30.735773746

solve(f(t+5)-g(t)=1,t)

Warning: More solutions may exist