Corrigé de l'examen Math II Sections : CD

I) $f(x) = (x+2)\cdot e^{-x}$

a) $\text{dom} f = \mathbb{R}$ ($\rightarrow$ pas d'AV)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(x+2)}_{\downarrow\, +\infty}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, 0}$ f.i. $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2 \;\to +\infty}{e^x \;\to +\infty}$ f.i.

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0^+$ AH à droite $\equiv y=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(x+2)}_{\downarrow\, -\infty}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, +\infty} = -\infty$ pas d'AH à gauche

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\dfrac{x+2}{x}}_{\downarrow\, 1}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, +\infty} = +\infty$ pas d'AO à gauche

- $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x) = e^{-x} + (x+2)\cdot(-e^{-x}) = e^{-x}\cdot(1-x-2) = e^{-x}\cdot(-1-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1-x=0 \Leftrightarrow x=-1$

Signe de $f'(x)$ = signe de $(-1-x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e max	$\searrow$	0 AH $\equiv y=0$

- $\forall x\in\mathbb{R}$ $f''(x) = -e^{-x}\cdot(-1-x) + e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x}\cdot(-1-x+1) = x\cdot e^{-x}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Point d'inflexion : $A(0,2)$

- Si $x=0$, alors $f(0)=2$ et $\mathcal{C}_f \cap Oy = \{A(0,2)\}$

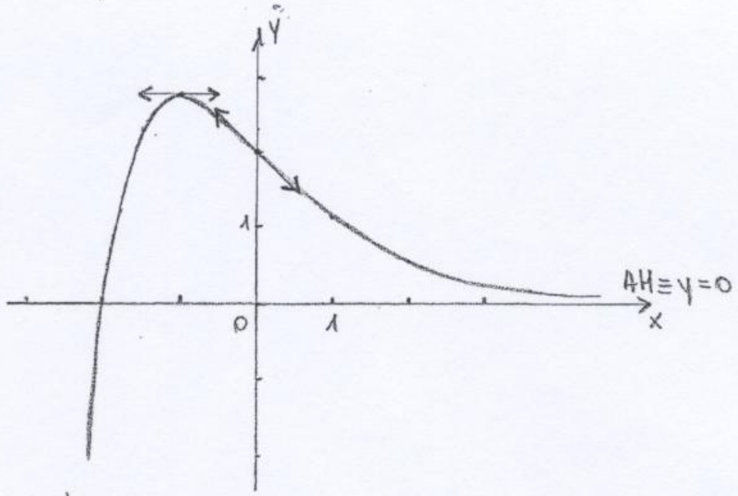
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ et $\mathcal{C}_f \cap Ox = \{B(-2,0)\}$

b) Equation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x=0$:

$y = f'(0)\cdot(x-0) + f(0)$ c.à.d. $y = -x+2$

c)

x	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	0	1	2
$f(x)$	$-6,09$	0	$2,24$	$2,72$	2	$1,10$	$0,54$



d) $A(\lambda) = -\int_{-\frac{5}{2}}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{\lambda} f(x)\,dx$

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+2)e^{-x}\,dx$ ipp. $u(x) = x+2$ et $v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

$= -(x+2)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx$
$= -(x+2)e^{-x} - e^{-x} + k = -e^{-x}(+x+2+1) + k = -e^{-x}(x+3) + k$

$A(\lambda) = -\left[F(-2) - F(-\tfrac{5}{2})\right] + F(\lambda) - F(-2)$
$= -\left[-e^{2} + \tfrac{1}{2}e^{\frac{5}{2}}\right] - e^{-\lambda}(\lambda+3) + e^{2}$
$= 2e^{2} - \tfrac{1}{2}e^{\frac{5}{2}} - (\lambda+3)e^{-\lambda}$ u. d'aire

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(2e^{2} - \tfrac{1}{2}e^{\frac{5}{2}} - \underbrace{(\lambda+3)}_{\downarrow\, +\infty}\underbrace{e^{-\lambda}}_{\downarrow\, 0}\right)$ f.i.

or $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} (\lambda+3)e^{-\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{\lambda+3 \to +\infty}{e^{\lambda} \to +\infty}$ f.i.

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{1}{e^{\lambda}} = 0$

Donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 2e^{2} - \tfrac{1}{2}e^{\frac{5}{2}} \approx 8{,}69$ u. d'aire

II) $f(x) = x + \ln(1+x)^2$

a) CE : $(1+x)^2 > 0 \Leftrightarrow 1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- $\lim\limits_{x\to-1} \left(\underbrace{x}_{\downarrow\,-1} + \underbrace{\ln(1+x)^2}_{\downarrow\,-\infty}\right) = -\infty$ AV $\equiv x = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\underbrace{x}_{\downarrow\,+\infty} + \underbrace{\ln(1+x)^2}_{\downarrow\,+\infty}\right) = +\infty$ pas d'AH à droite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\ln(1+x)^2}{x}\right) = 1$$

car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)^2}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2(1+x)}{(1+x)^2}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+x} = 0^+$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x)^2 = +\infty$ pas d'AO à droite

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (\underbrace{x}_{-\infty} + \underbrace{\ln(1+x)^2}_{+\infty}) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\left(1+\frac{\ln(1+x)^2}{x}\right) = -\infty$ pas d'AH à gauche

f.i.

car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+x)^2}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+x} = 0^-$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{\ln(1+x)^2}{x}\right) = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+x)^2 = +\infty$ pas d'AO à gauche

- $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\quad f'(x) = 1+\frac{2(1+x)}{(1+x)^2} = 1+\frac{2}{1+x} = \frac{1+x+2}{1+x} = \frac{3+x}{1+x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-3$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+x$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-3+\ln 4$ max	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$ (AV $x=-1$)	↗	$+\infty$

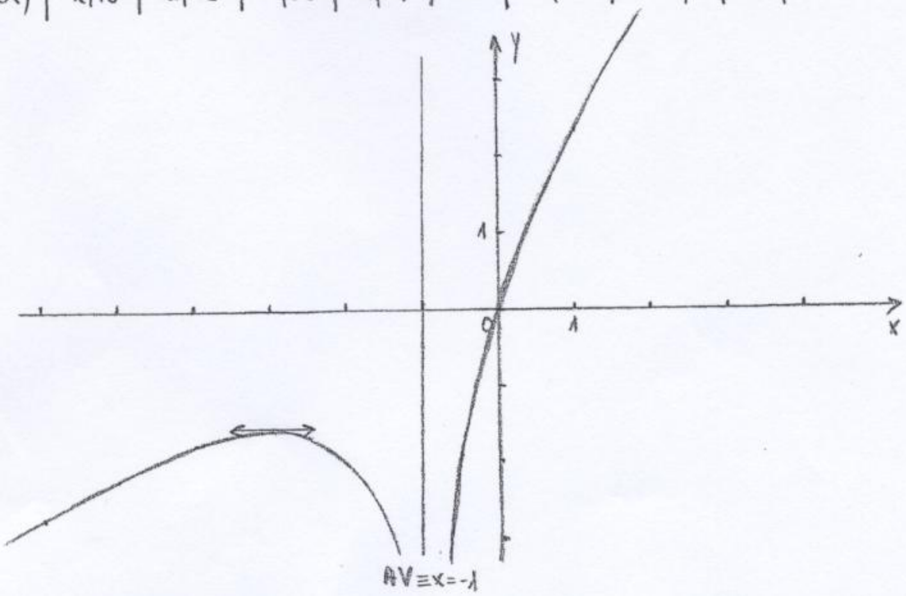
$-3+\ln 4 \approx -1{,}61$

- $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\quad f''(x) = \frac{1+x-(3+x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0$

La concavité de la courbe est tournée vers le bas.

b)

x	-6	-5	-4	-3	-2	$-0{,}5$	0	1	2
$f(x)$	$-2{,}78$	$-2{,}23$	$-1{,}80$	$-1{,}61$	-2	$-1{,}89$	0	$2{,}39$	$4{,}20$



c) $\mathcal{A} = \int_0^{e-1} f(x)\,dx = \int_0^{e-1} \left(x + \ln(1+x)^2\right) dx = \underbrace{\int_0^{e-1} x\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{e-1} \ln(1+x)^2\,dx}_{I_2}$

$I_1 = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{e-1} = \frac{1}{2}(e-1)^2$

$I_2 = \int_0^{e-1} \ln(1+x)^2\,dx$ ipp. $u(x) = \ln(1+x)^2$ et $v'(x) = 1$

$u'(x) = \frac{2}{1+x}$ et $v(x) = x$

$= \left[x\ln(1+x)^2\right]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{2x}{1+x}\,dx$

$= (e-1)\ln e^2 - \underbrace{\int_0^{e-1} \frac{2(x+1)-2}{1+x}\,dx}_{I_3}$

$I_3 = \int_0^{e-1} \left(2 - \frac{2}{1+x}\right) dx = \left[2x - 2\ln|1+x|\right]_0^{e-1} = 2(e-1) - 2\ln e$

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(e-1)^2 + (e-1)\ln e^2 - 2(e-1) + 2\ln e = \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2} + \cancel{2e} \cancel{-2} - \cancel{2e} \cancel{+2} + 2$

$= \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{5}{2}$ u. d'aire

$\simeq 3{,}48$ u. d'aire

III) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-1}$ posons $\frac{2}{x} = h$, alors $x = \frac{2}{h}$

si $x \to +\infty$, $h \to 0^+$

$= \lim\limits_{h \to 0} (1+h)^{\frac{6}{h}-1} = \lim\limits_{h \to 0} \underbrace{\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^6}_{\downarrow\, e^6} \cdot \underbrace{(1+h)^{-1}}_{\downarrow\, 1} = e^6$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cdot \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x \cos x \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos x \sin^3 x\,dx$

$= \left[2 \cdot \frac{\sin^4 x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1}{2}\sin^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$

c) $\ln(2x+1) - \ln 3 - \ln\sqrt{3-2x} \leq 0$ (I)

CE : 1) $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

2) $3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$, donc $D = \left]-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$ (I) $\Leftrightarrow \ln(2x+1) \leq \ln 3 + \ln\sqrt{3-2x}$

$\Leftrightarrow \ln(2x+1) \leq \ln 3 + \frac{1}{2}\ln(3-2x)$ $\quad | \cdot 2$

$\Leftrightarrow 2\ln(2x+1) \leq 2\ln 3 + \ln(3-2x)$

$\Leftrightarrow \ln(2x+1)^2 \leq \ln\left(3^2 \cdot (3-2x)\right)$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2 \leq 9 \cdot (3-2x)$ car ln est une bij. strict. croissante

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \leq 27 - 18x$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 22x - 26 \leq 0$ $\quad | : 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 11x - 13 \leq 0$

$\Delta = 121 + 4\cdot 2\cdot 13 = 121 + 104 = 225$

$x = \frac{-11+15}{4} = 1$ ou $x = \frac{-11-15}{4} = -\frac{13}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{13}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2+11x-13$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left[-\frac{13}{2};1\right] \cap \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[= \left]-\frac{1}{2};1\right]$

d) $40e^{-x} + 2 + e^{2x} = 7e^{x} \quad |\cdot e^{x}$

$\Leftrightarrow 40 + 2e^{x} + e^{3x} = 7e^{2x}$

$\Leftrightarrow e^{3x} - 7e^{2x} + 2e^{x} + 40 = 0$

Posons $e^{x} = y$; l'équation s'écrit alors :

$y^3 - 7y^2 + 2y + 40 = 0 \quad (E)$

$y = -2$ est une racine évidente.

	1	-7	2	40
-2		-2	18	-40
	1	-9	20	0

$(E) \Leftrightarrow (y+2)\cdot(y^2 - 9y + 20) = 0$

$\Leftrightarrow y = -2$ ou $y^2 - 9y + 20 = 0$

$\Delta = 81 - 4\cdot 20 = 1 \qquad y = \frac{9+1}{2} = 5$ ou $y = \frac{9-1}{2} = 4$

Revenons à l'inconnue x :

$e^{x} = -2$ ou $e^{x} = 5$ ou $e^{x} = 4$

impossible

$\Leftrightarrow x = \ln 5$ ou $x = \ln 4$

$S = \{\ln 5 ; \ln 4\}$

Corrigé du problème : La multiplication des drosophiles

2 1) $\left.\begin{array}{l} f(0) = 200 \iff \alpha \cdot e^{\beta \cdot 0} = 200 \iff \alpha = 200 \\ f(1) = 240 \iff 200 \cdot e^{\beta} = 240 \overset{\sqrt{200}}{\iff} \beta = 0{,}182 \end{array}\right\} \Rightarrow f(t) = 200 \cdot e^{0{,}182}$

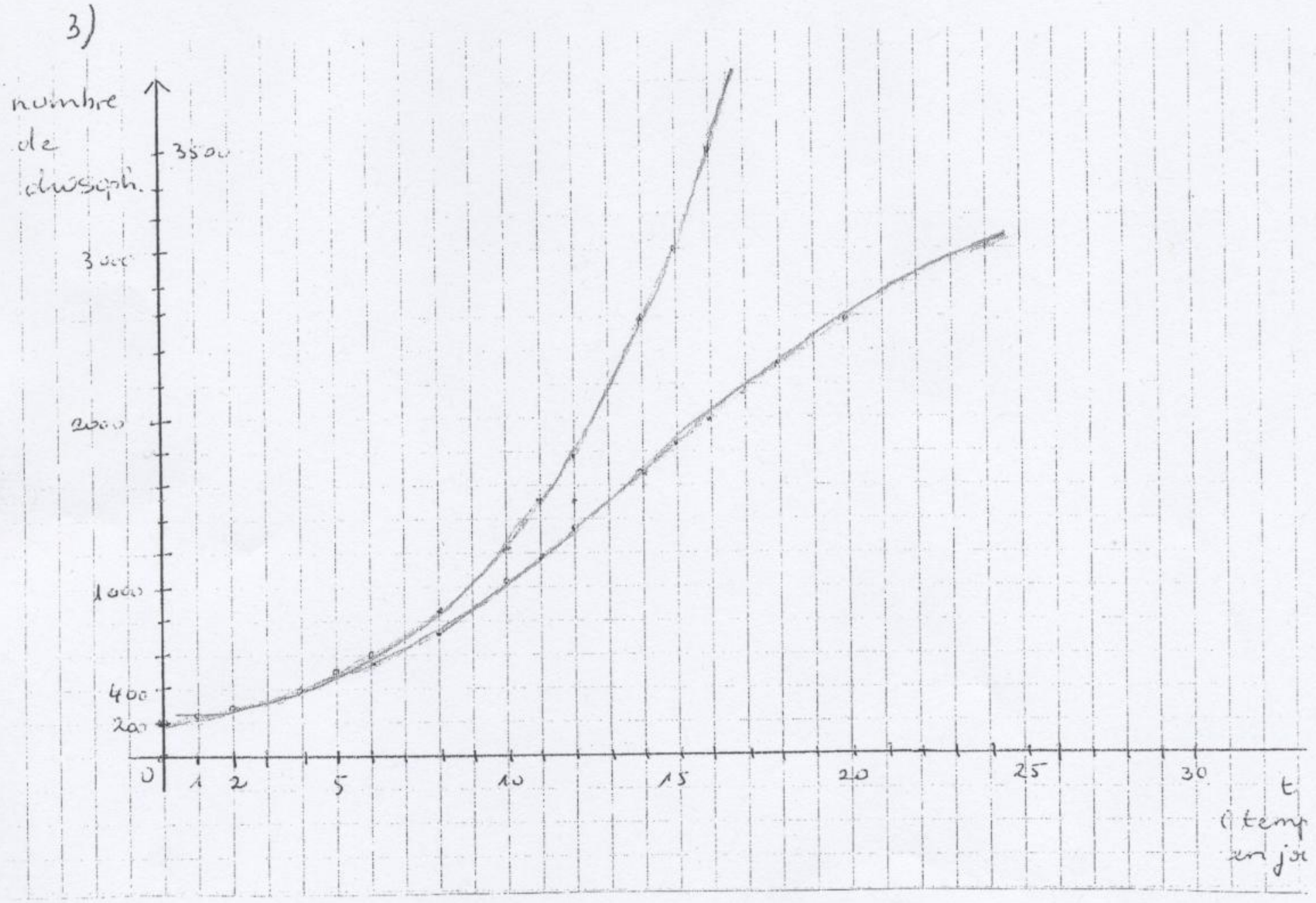
2) $f(t) > 3\,000 \iff 200 \cdot e^{0{,}182 \cdot t} > 3000 \overset{\sqrt{200}}{\iff} t > 14{,}88$

1 Au 15e jour la population dépasse les 3000.

3)

2

2



4) Le modèle de la croissance exponentielle n'est

1 pas réaliste vu que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ et que la

population se stabilise à environ 3500 drosophiles

5) D'après les conditions initiales :

3 $\begin{cases} g(0) = 200 \iff \dfrac{A}{1+B} = 200 & (*) \\ g(1) = 240 \iff \dfrac{A}{1+B\cdot e^{-k}} = 240 & (**) \end{cases}$

D'après 4) : $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 3500 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{A}{1+B\underbrace{e^{\underbrace{-kt}_{\to -\infty}}}_{\to 0}} = 3500$

$$\Leftrightarrow A = 3500$$

$A = 3500$ dans $(*)$: $\dfrac{3500}{1+B} = 200 \Leftrightarrow B = 16,5$

$A = 3500$ et $B = 16,5$ dans $(**)$: $\dfrac{3500}{1+16,5\cdot e^{-k}} = 240 \Leftrightarrow k = 0,1945$

Ainsi : $g(t) = \dfrac{3500}{1+16,5\cdot e^{-0,1945\cdot t}}$

7) $g(t) > 3000 \overset{\sqrt{200}}{\Leftrightarrow} t > 23,63$

1 A partir du 24^e^ jour la population dépasse les 3000 drosophiles.

8) L'accroissement de la population est maximal quand la vitesse de croissance $v(t) = g'(t)$ est maximale.

$$v(t) = g'(t) = \frac{11\,232,38\, e^{-0,1945t}}{(1+16,5\cdot e^{-0,1945\cdot t})^2}$$

$$\underset{\sqrt{200}}{\overset{\text{avec}}{=}} \frac{89859\ e^{0,1945t}}{2(2e^{0,1945}+33)^2}$$

3 $$v'(t) = \frac{-34955151\ e^{0,1945t}(2e^{0,1945t}-33)}{4000\,(2\cdot e^{0,1945t}+33)^3}$$

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t \simeq 14,41$

$v'(t) > 0 \Leftrightarrow t < 14,41$

t	0		$14,41$	
$v'(t)$		$+$	0	$-$
$v(t)$		$\nearrow$	$170,19$	$\searrow$

L'accroissement est maximal pour $t = 14,41$.
La vitesse de croissance est $170,19$; ce qui

veut dire qu'au 14^e jour environ, il y a une augmentation de 170 drosophiles par jour.

9) Besoin en nourriture :

$$\left(\int_0^{15} \frac{3500}{1 + 16{,}5 \cdot e^{-0{,}1945t}} \, dt \right) \cdot 0{,}5^3$$

$$\approx 12470{,}51 \cdot 0{,}125 \approx 1559 \text{ mm}^3 \approx 1{,}6 \text{ cm}^3$$