Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2007 **Sections: C , D** **Branche: Mathématiques II**	**Numéro d'ordre du candidat** ____________________

I. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

Démontrez que la fonction

$$F : [a;b] \to \mathbb{R} : x \to \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur $[a;b]$ et que sa dérivée est f . **6 points**

II. Résolvez l'inéquation $\log_2(x+1) + \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right) \geqslant \log_4(1-3x)$ **6 points**

III. On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-\ln x}$.

(a) Étudiez la fonction f :

domaines de définition, de continuité et de dérivabilité; limites aux bornes du domaine de définition et asymptotes; dérivée et extréma; point(s) d'inflexion éventuel(s); tableau de variation (avec concavité de la courbe); intersection de la courbe avec les axes de coordonnées; représentation graphique de f dans un repère orthonormé (unité: 1 cm)

(b) Montrez qu'il existe exactement une tangente t à G_f qui passe par le point $P(0;-1)$. Trouvez les coordonnées du point de tangence T et une équation de cette tangente.

17 points

IV. On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = (2-x^2) \cdot e^{-x}$.

Étudiez la position de G_f par rapport à G_g et calculez l'aire de la partie du plan limitée par les graphiques de f et de g, par l'axe Oy et par la droite d'équation $x = 2$ (valeurs exacte et approchée à 10^{-3} u.a. près).

7 points

V. (a) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x^3+x^2+x+1}$. Trouvez sur un intervalle I à préciser la primitive F de f qui prend la valeur π en 1 .

(b) Calculez l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 30x\sqrt{5-2x}\,dx$

4 + 5 = 9 points

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2007 **Section: C & D** **Branche: Mathématiques II**	**Numéro d'ordre du candidat** __________ __________

VI. a) i. Un cylindre en métal doit avoir une contenance de 1 m^3.
Trouver ses dimensions pour que la surface de métal nécessaire à sa fabrication (bases comprises) soit minimale. L'épaisseur du métal est négligeable.
Montrer que la hauteur du cylindre doit être le double de son rayon.

ii. On se pose la question de savoir si le résultat précédent est vrai quel que soit le volume du cylindre. Autrement dit, faut-il pour avoir un volume donné avec une surface latérale minimale que la hauteur du cylindre soit le double du rayon ?
Répondre à la question en refaisant le calcul précédent pour un volume V donné.

b) Pour une capacité donnée du cylindre, le fabricant sait que la fabrication de x cylindres coûte, en euros,

$$c(x) = 1200 + 12x - \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2000}x^3.$$

Son usine est capable d'en produire entre 30 et 280 par jour et s'il en vend x, il peut fixer le prix* à

$$p(x) = 29 - \frac{21}{100000}x.$$

Calculer :

i. le nombre minimum de cylindres à fabriquer par jour pour que l'entreprise dégage un bénéfice ;

ii. le nombre de cylindres à fabriquer pour que le bénifice devienne maximal ;

iii. le bénéfice maximal.

[15 points]

* d'un cylindre