Examen de fin d'études secondaires 2006 (Septembre)
section C, D
branche : mathématiques 2

Exercice 1 :

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim e^{\frac{\ln x}{x}} = "e^{-\infty}" = 0$ en effet $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = "\frac{-\infty}{0^+}" = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$ en effet $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{H}{=} \lim \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim \frac{1}{x} = 0$

b. $\log_4(x^2 - x - 2) < \log_2(x-1)$

conditions d'existence: $x^2 - x - 2 > 0$ et $x - 1 > 0 \Leftrightarrow (x<-1$ ou $x>2)$ et $x>1 \Leftrightarrow x>2$

$\frac{\ln(x^2 - x - 2)}{2\ln 2} < \frac{\ln(x-1)}{\ln 2} \Big| \cdot 2\ln 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < (x-1)^2 \Leftrightarrow x<3$

donc S=]2 ;3[

c. $2^{x+2} + 2^{1-x} = 9$

conditions d'existence: ---

$2^{x+2} + 2^{1-x} = 9 \Big| \cdot 2^x \Leftrightarrow 4\cdot 2^{2x} - 9\cdot 2^x + 2 = 0$

posons $y = 2^x$: $4y^2 - 9y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4} = 2^{-2}$ ou $y = 2^1 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$ donc $S = \{-2 ;1\}$

Exercice 2 :

$f(x) = xe^{x+1}$

a. dom f = IR

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = "(+\infty)\bullet(+\infty)" = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim \dfrac{x}{e^{-x-1}} \underset{H}{=} \lim \dfrac{1}{-e^{-x-1}} = \lim(-e^{x+1}) = 0$ donc A.H. y=0

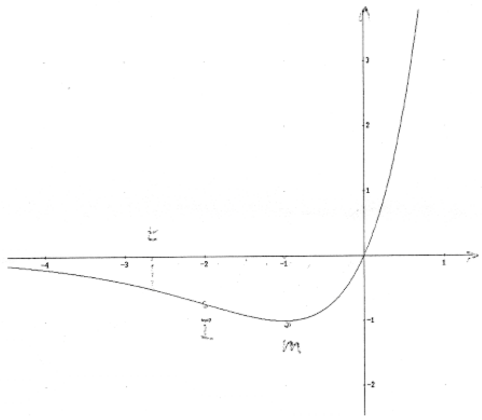
b. $f'(x) = (x+1)e^{x+1} \qquad f''(x) = (x+2)e^{x+1}$

tableau des variations

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
f'(x)		-		-	0	+	
f''(x)		-	0	+		+	
f(x)	0	↘	$-2e^{-1}$	↘	-1	↗	$+\infty$

minimum : m(-1 ;-1)   point d'inflexion I(-2 ;-2e^{-1})

c.



d. $V(t) = \pi \int_t^0 (f(x))^2\,dx = \pi \int_t^0 x^2 e^{2x+2}\,dx$

intégration par parties : u(x) = x^2 u'(x) = 2x v'(x) = e^{2x+2} v(x) = $\frac{1}{2}e^{2x+2}$

$$V(t) = \pi\left(\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x+2}\right]_t^0 - \int_t^0 xe^{2x+2}\,dx\right)$$

intégration par parties : u(x) = x u'(x) = 1   v'(x) = e^{2x+2} v(x) = $\frac{1}{2}e^{2x+2}$

$$V(t) = \pi\left(\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x+2} - \frac{1}{2}xe^{2x+2}\right]_t^0 + \frac{1}{2}\int_t^0 e^{2x+2}\,dx\right) = \pi\left(\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x+2} - \frac{1}{2}xe^{2x+2} + \frac{1}{4}e^{2x+2}\right]_t^0\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}e^2 - \pi\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)e^{2t+2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{2t+2} = \lim\frac{\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)}{e^{-2t-2}} \underset{H}{=} \lim\frac{-t+\frac{1}{2}}{-2e^{-2t-2}} \underset{H}{=} \lim\frac{-1}{4e^{-2t-2}} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} V(t) = \frac{\pi}{4}e$$

5,80u.v.

Exercice 3 :

$f(x) = \ln(4 - x^2)$

a) dom f =]-2 ;2[f pair

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

donc A.V. x=-2 et x=2

b) $f'(x) = \dfrac{-2x}{4-x^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{-2(x^2+4)}{(4-x^2)^2}$

x	-2		0		2
f'(x)	‖	+	0	-	‖
f''(x)	‖	-		-	‖
f(x)	‖ $-\infty$	↗	ln4	↘	$-\infty$ ‖

maximum M(0 ; ln4)

$g(x) = \ln(x^2 + 2)$

a. dom g = IR g pair

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} \underset{H}{=} \lim \dfrac{\frac{2x}{x^2+2}}{1} = 0$

donc pas d'A.O.

b. $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ $\quad g''(x) = \dfrac{-2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$

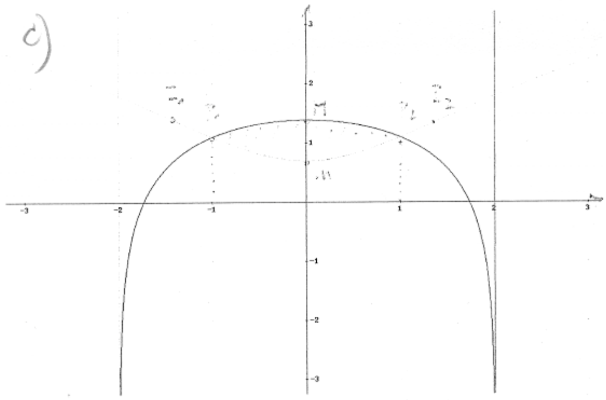
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
g'(x)		-		-	0	+		+	
g''(x)		-	0	+		+	0		
g(x)	$+\infty$	↘	ln4	↘	ln2	↗	ln4	↗	$+\infty$

minimum m(0 ;ln2)

points d'inflexion $I_1(-\sqrt{2}\ ;\ln 4)$ $I_2(\sqrt{2}\ ;\ln 4)$

c.

c)



f(x) = g(x) $\Leftrightarrow 4 - x^2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ou $x = -1$

points d'intersection $P_1(\cancel{-\sqrt{2}}\ -1;\ln 3)$ $P_2(\cancel{\sqrt{2}}\ 1;\ln 3)$

d) $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx$ $\qquad$ u(x) = ln(4 - x^2) – ln(x^2 + 2) $\quad$ u'(x) = $\dfrac{-2x}{4-x^2} - \dfrac{2x}{x^2+2} = \dfrac{-12x}{(4-x^2)(x^2+2)}$

v'(x) = 1 $\qquad$ v(x) = x

$$= \left[x \ln \frac{4-x^2}{x^2+2} \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{12x^2}{(4-x^2)(x^2+2)} dx \qquad \textit{(V200 expand!)}$$

$$= 0 + \int_{-1}^{1} \left(\frac{-4}{x^2+2} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(-2\sqrt{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} \right) dx =$$

$$= \left[-2\ln|x-2| + 2\ln|x+2| - 2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-1}^{1} \underset{V200}{=} -4\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 4\ln 3 = 0{,}91 \text{u.a.}$$

Correction flétan du Pacifique

La longueur (en cm) de beaucoup de poissons de t années communément mis en vente peut être donnée par une fonction de croissance de *von Bertalanffy* de la forme:

$$f(t) = a \cdot \left(1 - b \cdot e^{-k \cdot t}\right)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$ sont des constantes.
Le poids (en kg) d'un flétan du Pacifique en fonction de sa longueur (en m) est donné par la formule:

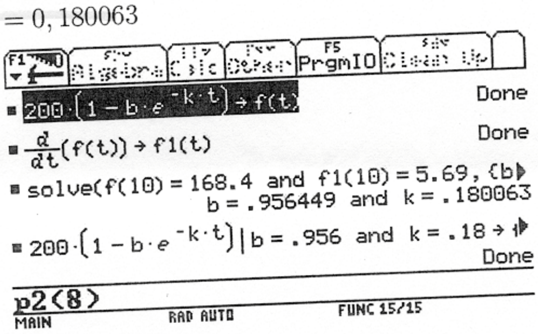
$$p(l) = 10,375 \cdot l^3$$

1. Déterminer a, b et k sachant qu'à la limite un flétan atteindra une longueur de 2 m, un flétan de 10 ans a une longueur de 168,4 cm et la vitesse de croissance d'un flétan de 10 ans est de 5,69 $cm/année$.

   On a: $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(a \cdot \underbrace{\left(1 - b \cdot e^{-k \cdot t}\right)}_{\to 1} \right) = a$ donc $a = 200$

   On a: $f'(10) =$ vitesse de croissance d'un flétan de 10 ans. Il faut donc résoudre le système d'équations $\begin{cases} f(10) = 168.4 \\ f'(10) = 5.69 \end{cases}$

   $\Longleftrightarrow\ b = 0,956449$ et $k = 0,180063$

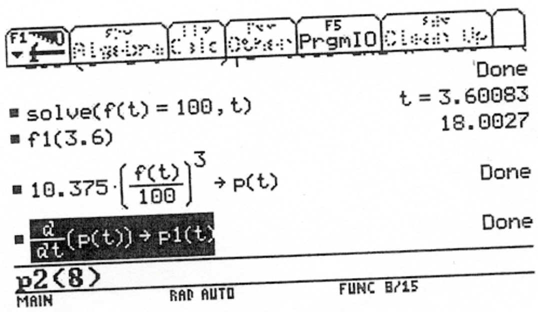


2. Pour la suite de l'exercice prendre $a = 200; b = 0,956$ et $k = 0,18$.
   Estimer l'âge et la vitesse de croissance d'un flétan dont la longueur est de 100 cm.

   On a $f(t) = 200 \cdot (1 - 0.956 \cdot e^{-0.18 \cdot t})$ et $f'(t) =$ vitesse de croissance au temps t

   Il faut résoudre l'équation $f(t) = 100 \iff t = 3,60083$

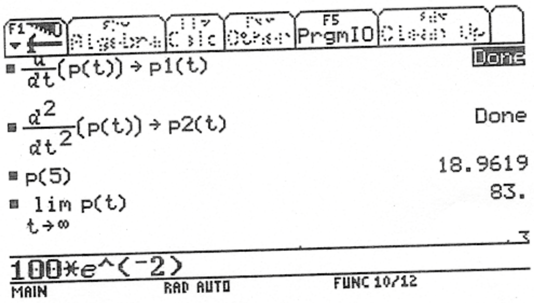
   Donc le flétan atteint une longueur de 100 cm après 3,6 *années* et sa vitesse de croissance est de $f'(3,6) \simeq 18$ $cm/année$



1

3. Calculer le poids ~~et la vitesse de croissance~~ du poids d'un flétan de 5 ans.

Il faut calculer $p\left(\dfrac{f(5)}{100}\right) \simeq 19\ kg$



4. Quelle est la limite du poids atteint par un flétan du Pacifique?

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} 10.375\left(\underbrace{\dfrac{200\cdot(1-0.956\cdot e^{-0.18\cdot t})}{100}}_{\to 2}\right)^3 = 10.375\cdot 8 = 83\ kg$

5. a) Exprimer le poids d'un flétan en fonction de son âge.

On a $p(t) = 10.375\left(\dfrac{200\cdot(1-0.956\cdot e^{-0.18\cdot t})}{100}\right)^3 = 83\cdot 0.582748^t\cdot(1.19722^t - 0.956)^3$

b) Quand la vitesse de croissance du poids est-elle maximale et qu'elle est alors sa valeur? (Utiliser l'expression de 5)a))

$p'(t)$ représente la vitesse de croissance à l'instant t et $p''(t)$ représente les variations de la vitesse de croissance.

On a donc une vitesse de croissance maximale à l'instant $t_0 \iff p''(t_0) = 0$ et $\begin{cases} p''(t) > 0 & \text{si } t < t_0 \\ p''(t) < 0 & \text{si } t > t_0 \end{cases}$

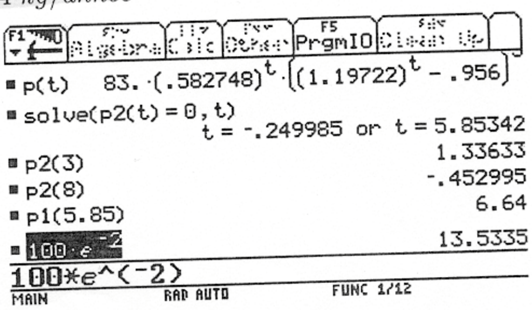
ou si $p''(t_0) = 0$ et $p'''(t_0) < 0$

On a $p''(t) = 0 \iff t \simeq -0.25$ à écarter ou $t \simeq 5.85$

donc $t_0 = 5.85$ et comme $p''(3) \simeq 1.34$ et $p''(8) \simeq -0.45$ la vitesse de croissance maximale est atteinte à 5.85 *ans*

t	0		5.85		$+\infty$
$p''(t)$		+	0	−	
$p'(t)$		↗	$f'(5.85) = 6.64$	↘	

et on a $p'(5.85) = 6.64\ kg/année$



2