(1)

Examen de fin d'études secondaires Mathématiques 2: CIT

I. 1) $6e^{x} - 7 - 14e^{-x} + 15e^{-2x} \geq 0 \quad | \cdot e^{2x} \qquad D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 6e^{3x} - 7e^{2x} - 14e^{x} + 15 \geq 0$

poser $e^{x} = y$ avec $y > 0$

$\Rightarrow 6y^3 - 7y^2 - 14y + 15 \geq 0$

V200 $\Leftrightarrow 6(y - \frac{5}{3})(y-1)(y+\frac{3}{2}) \geq 0$

y	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$y - 5/3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(y-1)(y+\frac{3}{2})$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$P(y)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq y \leq 1$ ou $y \geq \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq e^{x} \leq 1$ ou $e^{x} \geq \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x \leq 0$ ou $x \geq \ln\frac{5}{3}$

(5) $S =]-\infty; 0] \cup [\ln\frac{5}{3}; +\infty[$

2) $\frac{1}{2}\log_2(4-3x) \leq \log_2(3-2x) + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x}$

Cond: $* \ x < \frac{4}{3}$; $* \ x < \frac{3}{2}$; $* \ x > 0$

$D =]0; \frac{4}{3}[$

$\forall x \in D$, on a l'inéq.: $\frac{1}{2}\log_2(4-3x) \leq \log_2(3-2x) + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(4-3x)}{\ln 2} \leq \frac{2\ln(3-2x)}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \ln(4-3x) \leq 2\ln(3-2x) - \ln x$

$\Leftrightarrow \ln(4-3x) + \ln x \leq \ln(3-2x)^2$

$\Leftrightarrow x(4-3x) \leq (3-2x)^2$

(5) V200 $\Leftrightarrow -7x^2 + 16x - 9 \leq 0$

x	$-\infty$		1		$\frac{9}{7}$		$+\infty$
$-7x^2 + \dots$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]0; 1] \cup [\frac{9}{7}; \frac{4}{3}[$

3) $f(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \ln(-1+x^2) \qquad D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$* \lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{\ln(-1+x^2)}{x^3}$ f.i. "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{-1+x^2} \cdot 2x}{3x^2}$

$= 0$

$* \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$

$* \lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

(3)

$\boxed{13}$

II. 1) voir livre.

5

2) $A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2x}\cos 3x \, dx$ IPP : $u_1(x)=e^{-2x}$; $v'_1(x)=\cos 3x$

$u'_1(x)=-2e^{-2x}$; $v_1(x)=\frac{1}{3}\sin 3x$

$v'_2(x)=\sin 3x$

$A=\frac{1}{3}\left[e^{-2x}\sin 3x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2x}\sin 3x \, dx$

$v_2(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$

$A=\frac{1}{3}\left[e^{-2x}\sin 3x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{2}{9}\left[e^{-2x}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{4}{9}A.$

$\frac{13}{9}A=\frac{1}{3}\left(\cancel{e^{-2\pi}\sin 3\pi}-e^{-\pi}\sin\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{2}{9}\left(e^{-2\pi}\cos 3\pi-\cancel{e^{-\pi}\cos\frac{3\pi}{2}}\right)$

$\frac{13}{9}A=\frac{1}{3}e^{-\pi}+\frac{2}{9}e^{-2\pi} \quad / \cdot \frac{9}{13}$

4 $A=\frac{3e^{-\pi}}{13}+\frac{2}{13}e^{-2\pi}$

$B=\int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx+\int_1^9 \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$=\int_1^9 e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx+\int_1^9 \ln\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$=\left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^9+\left[2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right]_1^9-\int_1^9\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ IPP : $u(x)=\ln\sqrt{x}$; $v'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$; $u'(x)=\frac{1}{2x}$; $v(x)=2\sqrt{x}$

$=2e^3-2e^1+2\cdot 3\cdot\ln 3-\cancel{2\cdot 1\ln 1}-\left[2\sqrt{x}\right]_1^9$

4 $=2e^3-2e+6\ln 3-4$

4) $D=\int_{-2}^{1}\frac{3}{\sqrt{6-5x}}\,dx$

$=-\frac{3}{5}\left[2\sqrt{6-5x}\right]_{-2}^{1}$

$=-\frac{6}{5}(1-4)$

2 $=\frac{18}{5}$

$\boxed{15}$

III. $f(x) = (-2x^2 + 3x - 2)e^{2-x}$

1 1) a) <u>Domaine</u> $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} = \mathcal{D}_{f'}$

b) <u>Limites</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+3x-2}{e^{x-2}}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x+3}{e^{x-2}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{e^{x-2}} = 0 \qquad \underline{\text{A.H. } y=0}$$

(à dte).

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-2x+3-\frac{2}{x}\right) . e^{2-x} = +\infty$$

2 <u>B.P.</u> ds la direction de (Oy)

c) <u>Dérivée.</u>

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ f'(x) = (-4x+3)e^{2-x} + (-2x^2+3x-2)e^{2-x}.(-1)$$

$$= e^{2-x}(2x^2 - 7x + 5)$$

$$f'(x) = 0 \iff 2x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$\Delta = 9$$

2 $\iff x = \frac{5}{2}$ ou $x = 1$.

d) <u>Dérivée seconde</u>

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ f''(x) = -e^{2-x}(2x^2 - 7x + 5) + e^{2-x}(4x - 7)$$

$$= e^{2-x}(-2x^2 + 11x - 12)$$

$$f''(x) = 0 \iff 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$\Delta = 25$$

2 $\iff x = 4$ ou $x = \frac{3}{2}$

e) <u>Tabl. de variation</u>

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		$-e$ Max.		$-2\sqrt{e}$ $(-3,3)$ p.i.		$-\frac{7}{\sqrt{e}}$ min $(-4,2)$		$-\frac{22}{e^2}$ $(-3,0)$ p.i.		0

2

III (suite)

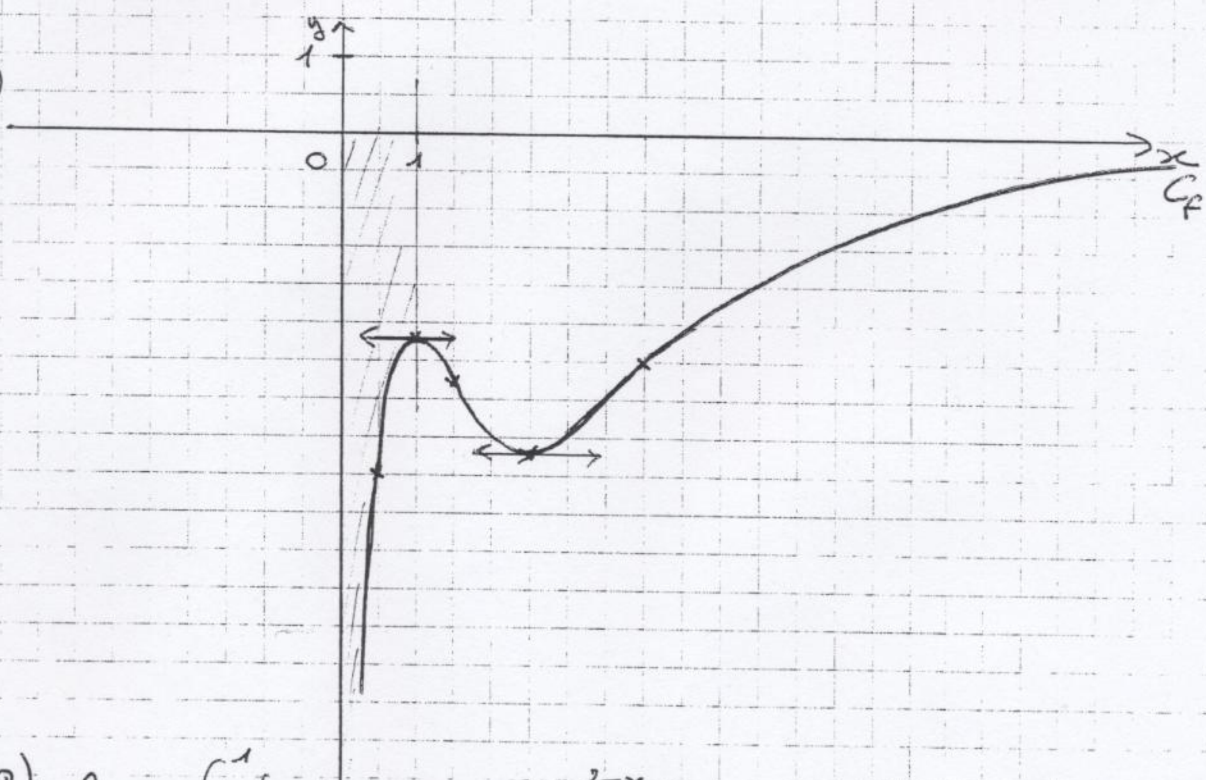
f) Pts. d'intersection avec les axes

$C_f \cap (Ox)$: $f(x)=0 \iff -2x^2+3x-2=0$ imp.
$\Delta<0$

$C_f \cap (Ox) = \emptyset$

1 $C_f \cap (Oy) = \{A(0, -2e^2)\}$

g)



3

2) $\mathcal{A} = -\int_0^1 (-2x^2+3x-2)e^{2-x}\,dx$

IPP : $u_1(x) = -2x^2+3x-2$; $v_1'(x) = e^{2-x}$
$u_1'(x) = -4x+3$; $v_1(x) = -e^{2-x}$

$\mathcal{A} = +\left[(-2x^2+3x-2)e^{2-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (-4x+3)e^{2-x}\,dx$

IPP : $u_2(x) = -4x+3$; $v_2'(x) = e^{2-x}$
$u_2'(x) = -4$; $v_2(x) = -e^{2-x}$

$\mathcal{A} = \left[(-2x^2+3x-2)e^{2-x}\right]_0^1 + \left[(-4x+3)e^{2-x}\right]_0^1 + 4\underbrace{\int_0^1 e^{2-x}\,dx}_{\left[-e^{2-x}\right]_0^1}$

4

√200 $= 3e^2 - 6e \simeq 5,86$ u.a.

$\boxed{17}$

QUESTION IV

1. $f(x) = \dfrac{6}{ax+b}$

- $\begin{cases} P\binom{2}{6} \in G_f \iff f(2) = 6 \\ Q\binom{5,25}{0,8} \in G_f \iff f(5,25) = 0,8 \end{cases}$

2 $\iff a = 2$ et $b = -3$

D'où, $f(x) = \dfrac{6}{2x-3}$

- En plus, résolvons $f(x) = 10$ (comme la tour a une hauteur de 100 m = 10 u.)

$\iff x = 1,8$

1 Ainsi, dom $f = [\,1,8\;;\;5,25\,]$

2. $g(x) = \dfrac{4}{2x-3}$ dom $g = [\,1,7\;;\;4\,]$

Vérifions : 1) $g(1,7) = 10$

2) $g(4) = 0,8$

1,5 3) $g(x) < f(x) \quad \forall x \in [\,1,8\;;\;4\,]$

$f(x) = 8,5 \iff x_1 \simeq 1,8529$

1,5 $g(x) = 8,5 \iff x_2 \simeq 1,7553$

Ainsi, l'épaisseur à une altitude de 85 m est :

$x_1 - x_2 \cong 0,1176$ u.

$\cong 1,176$ m

3. Soit β l'angle orienté formé par la tangente à G_g et l'horizontale au pt. d'abscisse 4.

$\tan\beta = g'(4)$

3 $\iff \tan\beta = \dfrac{-8}{25}$

$\iff \beta \simeq -17,74°$

D'où $\alpha = |\beta| + 90°$

$\alpha \cong 107,74°$

4. G_k est le symétrique de G_g par rapport à l'axe des y.

1 D'où $k(x) = g(-x) = \dfrac{-4}{2x+3}$ $x \in [-4\,;\,-1,7]$

eco-logic

5.

$$\frac{1}{2}\cdot A = \underbrace{\int_{1,7}^{1,8}\left(10 - \overset{g(x)}{\cancel{f(x)}}\right)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{1,8}^{4}\left(\overset{f(x)}{\cancel{g(x)}} - \overset{g(x)}{\cancel{f(x)}}\right)dx}_{A_2} + \underbrace{\int_{4}^{5,25}\overset{f(x)}{\cancel{g(x)}}\,dx}_{A_3}$$

$A_1 \cong 0,1891$ u.a.

5 $A_2 \cong 2,1203$ u.a

$A_3 \cong 1,2164$ u.a.

Ainsi $\frac{1}{2}A = A_1 + A_2 + A_3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A \cong 3,5257$ u.a.

$\Leftrightarrow A \cong 7,0515$ $\underbrace{\text{u.a}}_{100\,m^2}$

$\Leftrightarrow \boxed{A \cong 705\ m^2}$

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $\frac{6}{a\cdot x+b} \rightarrow f(x)$ Done
- solve($f(2)=6$ and $f(5.25)=.8$, {a b})
  $a = 2.0000$ and $b = {}^{-}3.0000$
- $f(x) \mid a=2.$ and $b={}^{-}3$ $\quad \frac{6}{2.0000\cdot x-3}$
- $\frac{6}{2\cdot x-3} \rightarrow f(x)$ Done

MAIN RAD AUTO FUNC 1/5

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $\frac{6}{2\cdot x-3} \rightarrow f(x)$ Done
- $\frac{4}{2\cdot x-3} \rightarrow g(x)$ Done
- $g(1.7)$ 10.0000
- $g(4)$ 4/5
- solve($g(x) < f(x), x) \mid 1.8 \le x \le 4$
  $1.8000 \le x \le 4$

1.8529411764706-1.73529411764…

MAIN RAD AUTO FUNC 8/12

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

$1.8000 \le x \le 4$

- solve($f(x) = 8.5, x$) $x = 1.8529$
- solve($g(x) = 8.5, x$) $x = 1.7353$
- $1.8529411764706 - 1.7352941176471$
  .1176
- $\frac{d}{dx}(g(x)) \rightarrow d1g(x)$ Done
- $d1g(4)$ $-8/25$

abs(-17.744671625057)+90

MAIN DEG AUTO FUNC 9/17

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $\frac{d}{dx}(g(x)) \rightarrow d1g(x)$ Done
- $d1g(4)$ $-8/25$
- $\tan^{-1}(-8/25)$ $-\tan^{-1}(8/25)$
- $\tan^{-1}(-8/25)$ -17.7447
- $|-17.744671625057| + 90$ 107.7447
- $g(-x)$ $\quad \frac{-4}{2\cdot x+3}$

g(-x)

MAIN DEG AUTO FUNC 18/30

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $\int_{1.7}^{1.8}(10-g(x))\,dx$ .1891
- $\int_{1.8}^{4}(f(x)-g(x))\,dx$ 2.1203
- $\int_{4}^{5.25} f(x)\,dx$ 1.2164
- $.189069783784 + 2.1202635362002 + 1.216$▸
  3.5257

…202635362002+1.2163953243249

MAIN DEG AUTO FUNC 22/30